

# KOMBINATORIK

---

XANTCHA

*Tentamen 17 mars 2014*

**Lösningar.** Fullständiga lösningar skall redovisas på varje problem. Enbart räkningar utan förklarande text kan aldrig ge mer än halv poäng på en uppgift.

**Svar.** Svaren skall förenklas så långt det går, men får dock innehålla outräknade binomialkoefficienter, faktuteter eller potenser, förutsatt att talen utskrivna innehåller fler än fyra siffror i tiosystemet.

**Betyg.** Varje problem är värt 6 poäng. Betygen 3, 4 och 5 svarar ungefärligen mot 18, 25 respektive 32 poäng, ehuru poängen allenast är att betrakta som vägledande vid betygsättningen.

På Årsta, i sydvästra delen av Stockholm, härskade för tvåhundra år sedan *Märta Helena Reenstierna*, gift ryttmästarinna von Schnell. Vi skall göra några nedslag i hennes liv, som finns noga krönikerat i den märkliga dagbok hon förde under åren 1793–1839.

1. Fru von Schnell låter måla sitt porträtt hos kapten Rönngren:

*17. October 1796.* — Morgon mot klockan 8 for jag till Staden och lät hos Hårfriseurskan Gran coefera mig med bouclerat hår och en guirland af Fleurs eternelles, vir gies mir nicht<sup>1</sup> och gröna blader. Jag klädde mig sedan i blå tafts klädning med spetshalsrimsa och en Törnros bouquette och for klockan 11 till Herr Capitainen Rönngren, som nu fullbordade mitt Portrait, sedan jag tillförene i 3 omgångar tillsammans räknade suttit för honom 10 timmar, och nu denna gången 5, inalles 15 timmar.

Hon har alltså suttit modell fyra gånger under sammanlagt 15 timmar. Senaste gången varade exakt 5 timmar.

---

<sup>1</sup>förgätmigej

- (a) Om vi antar att hon suttit modell ett helt antal *halvtimmar* var gång, och minst en halvtimme åt gången, på hur många sätt kan då detta ha skett?
  - (b) Om vi dessutom antar att hon satt modell högst fem timmar den första gången, på hur många sätt kan det då ha skett?
2. Fru von Schnell ägnar sig med förkärlek åt sina växter:

*8. Maj 1797.* — Prägtigt väder. Alla mina citronstammar, 28 till antalet, omplanterades i lådor och krukor.

- (a) Hur många sätt finns det att plantera de 28 olikartade citronträden i 7 identiska krukor, om ingen kruka får vara tom?
  - (b) Hur många sätt finns det, om även krukorna antages vara olika, och fortfarande ingen kruka må vara tom?
  - (c) Hur många sätt finns det, om krukorna fortfarande antages vara olika, men de tillåts vara tomma?
3. Årsta herrgård hade, på fru von Schnells tid, utom förmak och kök, elva rum, vilka ibland omnämnes vid namn i dagboken:

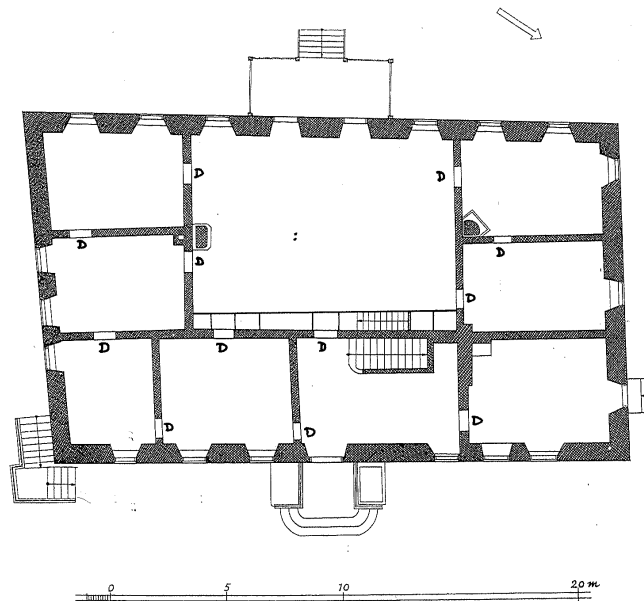
*25. December 1807.* — Fredag. Juldag. Stormade rätt mycket. Magdelin och Maja voro i Bränkyrka från vårt hus. Jag städade gula kammarn. Cecilia var arg och otidig. Åt upp den Julgröt, som samtelig skulle hafva till aftonen. Musicanter och utklädde sjungande pojkar<sup>2</sup> vrälade eftermiddagen i förstugan. För öfrigt var tyst och stilla.

En karta över nedanvåningen finns i Figur 1, där dörrarna för tydlighets skull utmärkts med bokstaven D.

- (a) Rita en graf som modellerar husets nedanvåning enligt skissen, där noderna får motsvara rummen och bågarna dörrarna.
- (b) Är grafen planär?
- (c) Har huset en Euler-vandring, öppen eller sluten?
- (d) Har huset en Hamilton-väg?
- (e) Har huset en Hamilton-cykel?
- (f) Kan man slå ut en ny dörr mellan två rum så att huset får en Euler-vandring, öppen eller sluten? Vilka möjligheter finns i så fall att placera denna dörr?

---

<sup>2</sup>stjärngossar



Plan av stenhusets bottenvåning sådan den varit under 1700-talet. På dagbokens tid voro vissa rum avdelade med nu försvunna väggar. En rekonstruktion av dessa har ej kunnat göras.

FIGUR 1: Planritning över Årsta herrgård.

4. Från julbaket anno 1797 hämtar vi följande notis:

22. *December 1797.* — Något frost sedan litet snösmol. Klockan  $\frac{1}{2}$  6 om morgonen begynte jag att tillaga degarne, som voro 2 rågbröd, 2 vörtbröd, 2 hvete och 2 bakelsedegar.

(a) Fru von Schnell har alltså åtta degar att tillreda, två av vart slag. Hur många olika sätt finns det att laga dessa i ordning efter varandra?

(b) Hur många sätt finns det att planera baket, om hon, för omväxlings skull, inte vill tillaga två degar av samma slag direkt efter varandra?

5. Trädgården var och förblev fru von Schnells ögonsten. I den engelska parkkonstens anda hade hon här skapat små oaser med namn som *Solituden*, *Eremitagen*, *Rendez-vous* och *Belle Montagne*:

30. *April 1796.* — Vackert väder. Min Solitude blef nu putsad, gången planerad och planterades å ömse sidor en blandning träd af 12 slag, Törnrosor, al, hägg, pil, rönn, hagtorn, vinbär, krusbär, plommon, apel, chesmin och Syrén.

Hur många sätt finns det att plantera en rad av 24 träd och buskar av de angivna 12 sorterna, om det skall finnas ett jämnt antal syrenbuskar och ett udda antal rosenbuskar?

6. Dagboken vittnar om fru von Schnells flitiga sällskapsliv:

*27. Augusti 1797.* — Vi voro hemma klock: 12, då under vår bortavaro Guldsmed Vesterstråle med Dess Bror Sjö-Capit: kommit hit, sedan vi spiset middag for jag åter med dem till Stan, och voro desse Herrar med Revisorn, fru Vestman, fru Vesterstråle och jag sedan på Comiska Spectaclet om aftonen, hvarest uppfördes *Det underjordiska Hvalfvet*, och *Det lefvande Spöket*.

Låt oss säga, att fru von Schnell under hösten tänker avlägga fyrtio visiter hos de tre herrskapen Vestman, Vesterstråle och Schoerbing. Dock vill hon inte gärna besöka Schoerbings två gånger i rad, ty fru Schoerbing kan stundom vara en smula vass och fattar dessutom ofta humör då de spelar trois sept.

Hur många sätt finns det att planera dessa fyrtio visiter? Lös problemet genom att ställa upp och lösa en differensekvation.

7. Fru von Schnell bereddes en gång tillfälle att beskåda ett par kungakronor, den ena fordom nyttjad av Eric XIV och den andra ursprungligen anskaffad för Gustaf II Adolphs gemål Maria Eleonora:

*15. Junii 1809.* — Jag var hos Actuarien Rylander och fick hans Mamsell som gjorde mig sällskap åt bodarne. Vi voro hos Jouveleraren Carlström och sågo den Kungl: stora kronan, efven en annan som tillhört Kung Eric den XIV och var med mindre antal bågar. Den stora var infattad med Rubiner och Taffelstenar<sup>3</sup>. Jag var ock hos Jouveleraren Carlén att köpa en kam med Guld och mycket små ägta perlor, men var genast ångerköpt för mina 40 RDr.

Låt oss antaga att vi vill smycka en krona med en rad (alltså *ej* en sluten ring) bestående av högst  $p$  rubiner och exakt  $q$  diamanter. Visa att detta kan ske på  $\binom{p+q+1}{q+1}$  olika sätt.

---

<sup>3</sup>diamanter slipade i rektangulär form