KOMBINATORIK

Xantcha

Lösningar 17 mars 2014

1. (a) 20 halvtimmar skall fördelas över tre pass med minst en halvtimme per pass. Detta betyder att 17 halvtimmar skall fördelas fritt över dessa tre pass, vilket låter sig göras på

$$\binom{17+3-1}{17} = \binom{19}{17} = 171$$

sätt.

(b) Om det första passet upptog minst 11 halvtimmar, och det andra och tredje passet minst en halvtimme vardera, så återstår 7 halvtimmar att fördela, vilket kan ske på

$$\binom{7+3-1}{7} = \binom{9}{7} = 36$$

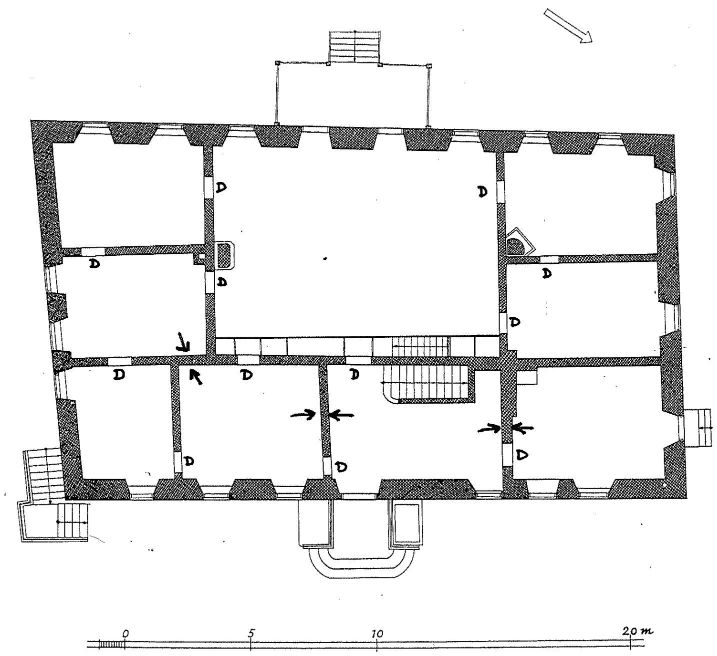
sätt. Antalet möjligheter för det första passet att ha rymt högst 10 halvtimmar är därför differensen $171 - 36 = 135$.

2. (a) 28 olika objekt skall fördelas i 7 identiska lådor, med ingen låda tom, vilket går på

$$S(28,7) = \frac{1}{7!}\left(7^{28} - \binom{7}{6}6^{28} + \binom{7}{5}5^{28} - \binom{7}{4}4^{28} + \binom{7}{3}3^{28} - \binom{7}{2}2^{28} + \binom{7}{1}1^{28}\right)$$

sätt.

(b) 28 olika objekt skall nu fördelas i 7 olika lådor, med ingen låda tom, vilket går på



Plan av stenhusets bottenvåning sådan den varit under 1700-talet. På dagbokens tid voro vissa rum avdelade med nu försvunna väggar. En rekonstruktion av dessa har ej kunnat göras.

Figur 1: Problem 3.

$$7!S(28,7) = 7^{28} - \binom{7}{6}6^{28} + \binom{7}{5}5^{28} - \binom{7}{4}4^{28} + \binom{7}{3}3^{28} - \binom{7}{2}2^{28} + \binom{7}{1}1^{28}$$

sätt.

(c) 28 olika objekt skall nu fördelas fritt i 7 olika lådor, vilket går på 7^{28} olika sätt.

3. (a) —
   (b) Uppenbarligen.
   (c) Nej, ty fyra av rummen har ett udda antal dörrar.
   (d) Ja: Vandra runt huset medsols, med start i rummet längst ned till höger.
   (e) Nej, ty rummet längst ned till höger har en enda dörr och kan därför omöjligt ingå i en Hamilton-cykel.

(f) Man kan skapa en öppen Euler-vandring genom att slå en dörr mellan två rum med udda antal dörrar, så att de vardera får ett jämnt antal dörrar. Detta kan göras på tre sätt; tänkbara positioner för den nya dörren finns markerade med pilar i Figur 1.

4. (a) Detta kan göras på $\frac{8!}{2!2!2!2!} = 2,520$ sätt.

   (b) Låt U beteckna mängden av samtliga $2,520$ möjligheter att planera baket, och låt A_i, för $1 \leqslant i \leqslant 4$, vara mängden av de bakschemata vari bägge degarna av sort nummer i bakas intill varandra. Då är (för olika i, j, k)

$$\begin{aligned} |A_i| &= \frac{7!}{2!2!2!} = 630 \\ |A_i \cap A_j| &= \frac{6!}{2!2!} = 180 \\ |A_i \cap A_j \cap A_k| &= \frac{5!}{2!} = 60 \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| &= 4! = 24, \end{aligned}$$

och Principen om Inklusion och Exklusion ger det sökta svaret

$$\begin{aligned} \left|\complement(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)\right| &= |U| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| \\ &\quad - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_2 \cap A_4| \\ &= 2,520 - 4 \cdot 630 + 6 \cdot 180 - 4 \cdot 60 + 24 \\ &= 864. \end{aligned}$$

5. Svaret är koefficienten för $\frac{x^{24}}{24!}$ i den exponentiella genererande funktionen

$$\begin{aligned} &\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^{10} \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \\ &= e^{10x} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{4}(e^{12x} - e^{8x}) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(12x)^n}{n!} - \frac{(8x)^n}{n!} \right), \end{aligned}$$

som är $\frac{1}{4}(12^{24} - 8^{24})$.

6. Låt a_n beteckna antalet sätt att göra n visiter. Då finns två möjligheter:

   - Sista visiten är till Vestmans eller Vesterstråles. Det finns a_{n-1} sätt att planera in de första $n-1$ visiterna, varför detta ger $2a_{n-1}$ möjligheter.

- Sista visiten är till Schoerbings. Visiten dessförinnan kan då ha varit till Vestmans eller Vesterstråles, och de första $n-2$ visiterna kan ha utförts på a_{n-2} sätt.

Sammantaget ger detta differensekvationen

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Den karakteristiska ekvationen är $r^2 = 2r + 2$ med rötterna $r = 1 \pm \sqrt{3}$. Allmänna lösningen är därför

$$a_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n.$$

Begynnelsevillkoren är

$$\begin{cases} 1 = a_0 = A + B \\ 3 = a_1 = A(1+\sqrt{3}) + B(1-\sqrt{3}), \end{cases}$$

varav $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3}$ och $B = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{3}$.
Lösningen är alltså

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(1+\sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(1-\sqrt{3})^n.$$

Det finns

$$a_{40} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(1+\sqrt{3})^{40} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(1-\sqrt{3})^{40}$$

sätt att planera de fyrtio visiterna.

7. Antalet kronor med exakt n rubiner och exakt q diamanter är $\binom{n+q}{q}$. Dert sökta antalet kronor är därför

$$\sum_{n=0}^{p} \binom{n+q}{q}.$$

Med induktion över p följer nu att

$$\sum_{n=0}^{p} \binom{n+q}{q} = \binom{p+q+1}{q+1}. \tag{1}$$

Ty för $p = 0$ är båda leden lika med 1. Med induktionsantagande att likheten (1) gäller är

$$\sum_{n=0}^{p+1} \binom{n+q}{q} = \sum_{n=0}^{p} \binom{n+q}{q} + \binom{p+1+q}{q}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{p+q+1}{q+1} + \binom{p+q+1}{q} \\
&= \binom{p+q+2}{q+1} = \binom{(p+1)+q+1}{q+1},
\end{aligned}
$$

vilket bevisar påståendet för alla p.