

KOMBINATORIK

XANTCHA

Tentamen 10 juni 2014

Lösningar. Fullständiga lösningar skall redovisas på varje problem. Enbart räkningar utan förklarande text kan aldrig ge mer än halv poäng på en uppgift.

Svar. Svaren skall förenklas så långt det går, men får dock innehålla outräknade binomialkoefficienter, faktulteter eller potenser, förutsatt att talen utskrivna innehåller fler än fyra siffror i tiosystemet.

Betyg. Varje problem är värt 6 poäng. Betygen 3, 4 och 5 svarar ungefärligen mot 18, 25 respektive 32 poäng, ehuru poängen allenast är att betrakta som vägledande vid betygsättningen.

En gång i månaden församlas de tre damerna Jeanette, Marie-Louise och Agate-Julie för att dricka the, prata skvaller och spela wira.

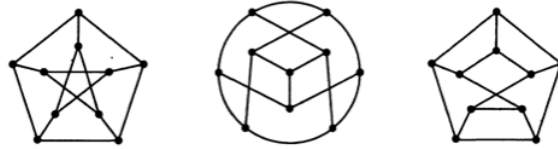
Med Vittorins ord:

Af alla kortspel är wira utan tvifvel det mest svenska såsom både uppfunnet och nästan uteslutande idkadt i Sverige.

Wiran åtnjöt en omåttlig popularitet i Sverige under 1800-talet och spelades i varje salong, innan det trängdes ut av bridgen på 1900-talet.

Man använder sig av en vanlig kortlek, innehållande 52 kort. Vid given delas korten ut, tretton till var och en av de tre spelarna, varpå de tretton återstående bildar talongen och placeras på bordet.

- i. (a) På hur många sätt kan de tretton hjärterkortet fördelas? De fyra högarna anses vara *olika* och ordningen på korten i varje hög är oväsentlig.
- (b) Hur många sätt finns det, om vi inte tar hänsyn till valören, och alltså endast räknar *antalet* hjärterkort i varje hög?



FIGUR 1: Jeanettes, Marie-Louises och Agate-Julies respektive vänkretsar.

- (c) Hur många sätt finns det att fördela hjärterkortet, *med* hänsyn tagen till valören, om det skall finnas minst en hjärter i varje hög?
2. Enastående sällsynt är situationen, då en av spelarna (*ej* talongen) erhåller en hel svit (samtliga tretton kort) i en färg (hjärter, ruter, spader, klöver), ty hon kan då bjuda, och gå hem i, det högsta av alla bud, nämligen *solo wira*.

Hur många möjligheter finns det för detta att inträffa? De fyra högarna anses, liksom i föregående problem, vara olika, och ordningen på korten inom varje hög är oväsentlig.

3. Bland wiraspelets många färgstarka bud märks *spel*, *tourner*, *vingel*, *tringel*, *gasque*, *köp-misère* samt den alltid lika försmädliga *göken*. Det finns ofantligt många fler varianter, men i detta problem begränsar vi oss till de ovan nämnda.

Hur många sätt finns det att spela n rundor, var och en i något av de angivna buden, så att det förekommer ett udda antal vinglar och minst en gök? Lös problemet med genererande funktion.

4. När väl spelet kommit igång, pladdrade damerna glatt och tanklöst på om allt och alla de kände. De kunde prata i timtal om andra människors privata angelägenheter, ty de tre damerna älskade skvaller, till och med mer än de älskade bordets njutningar.

Jeanettes, Marie-Louises och Agate-Julies respektive vänkretsar finns avbildade i Figur 1. Noderna svarar mot personer och en båge mellan två noder betyder att dessa två personer känner varandra. Avgör vilka av dessa grafer, som är isomorfa.

5. (a) "Några nyheter sedan sist?" sporde Marie-Louise.
 "Jag inbjöd till middag förra helgen," sade Jeanette. "Glaserad anka i sås kryddad med chili från mina egna plantor. Nio gäster var här, och de beundrade alla min skicklighet i köket."

“Ni var således tio personer!” utbrast Agate-Julie. “Vilken oändlig massa möjligheter det måtte finnas, att bänka er kring det runda matsalsbordet!”

Ja, hur många sätt finns det egentligen?

- (b) “Icke så många möjligheter som du tror, sötaste lilla Agate-Julie,” inföll då genast Jeanette. “Du förstår, vi var fem herrar och fem damer, och jag vill gärna, att man skall sitta varannan herre, varannan dam, ty jag bekänner mig till den klassiska skolan.”

Marie-Louise lät höra ett belåtet brummande.

Hur många sätt finns det nu för Jeanette att placera de tio personerna?

- (c) “Men ack! Sedan kom katastrofen.” Jeanette vred sina händer i förtvivlan. “Jag skäms nästan att tala därom, ty så pinsam och så genant förefaller mig denna malheur. Men till er båda vågar jag anförtro mig, ehuru ni måste lova, att icke sprida denna historia vidare.”

Marie-Louise och Agate-Julie samtyckte villigt, och svor på, att de icke under några omständigheter skulle förråda sin väninna.

“Nå,” sade Jeanette, “allting var alltså ställt i ordning inför gästernas arrivée. I ugnen stekte den gyllene ankan, insmord i sitt eget fett och spridande de mest läckra och förföriska dofter. Desserten var redo och vinet satt på kylning. Allt verkade arta sig till det bästa. Men så insåg jag, till min stora förskräckelse, att jag av misstag placerat Jean-Luc och Belle-Sophie intill varandra!”

“Bevare mig väl, Jeanette!” utbrast Agate-Julie förfasad. “Hur tänkte du där? Efter den senaste skandalen!”

“Nej, kära Jeanette, du måtte icke ha tänkt alls,” avgjorde Marie-Louise. “Jean-Luc och Belle-Sophie bredvid varandra! Där gick du allt med huvudet under armen.”

“Ja, jag begriper icke, hur jag kunde misstaga mig så grovt. Men lyckligtvis hann jag stuva om placeringskorten och åstadkomma ett mindre alarmerande utgångsläge, innan man ringde på dörren.”

Hur många sätt finns det för Jeanette att placera de fem herrarna och fem damerna (fortfarande varannan herre, varannan dam), om Jean-Luc och Belle-Sophie ej måtte sitta intill varandra?

6. I halvtid tog damerna paus och Jeanette serverade the och bjöd omkring hembakta kakor.

“Kära hjärtanes, vad hett det var,” sade Agate-Julie, då hon försiktigt

smuttat på drycken. "Jag tyckte jag såg ett paket mjölk i kylskåpet, Jeanette?"

"Det gick ut för en vecka sedan," svarade Jeanette förargat. "Du må allt vänta på, att théet svalnar av sig själv."

"Å kära nån, hur lång tid kan det tänkas dröja då?"

"Det modellerar man enkelt med en differentialekvation," sade Marie-Louise käckt, "men sådana avancerade saker känner du väl inte till, kan jag tro?"

Agate-Julie gjorde en nekande åtbörd, varpå Marie-Louise återtog:

"Nå, låt oss uppställa en enklare modell med hjälp av en så kallad differensekvation. Vi säger, att temperaturen efter n minuter är T_n . Ursprungligen är théet kokande, alltså $T_0 = 100^\circ$. Efter en minut har temperaturen fallit till $T_1 = 95^\circ$. Enligt fysikens lagar är avsvälningen proportionell mot temperaturdifferensen mot omgivningen, det vill säga

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - 25),$$

där 25° är rumstemperaturen och k är någon proportionalitetskonstant. Med hjälp härav kan du enkelt bestämma en formel för T_n . Det klarar du väl?"

"Ja, kära nån, visst kan jag väl det," mumlade Agate-Julie osäkert.

Hjälp stackars Agate-Julie, att bestämma en formel för temperaturen T_n . Verifiera med hjälp av denna, att T_n går mot 25 då $n \rightarrow \infty$.

7. Spelet var över, och damerna reste sig att taga farväl.

(a) "Men sötaste, lilla Agate-Julie!" utbrast då Marie-Louise. "Du har bestämt omaka strumpor på dig!"

Agate-Julie rodnade upp över öronen. "Ja, det var förskräckligt, Marie-Louise, men just som jag stod där i hallen och hade som mest bråttom att komma iväg, så slocknade ljuset och allt blev mörkt som i en bunker. Det var väl en sådan där propp som gick, kan jag tro."

"Snarare en glödlampa som brann ut," sade Jeanette. "Jag får väl komma över och hjälpa dig skruva i en ny."

"Jag visste ej rätt, vad jag skulle taga mig till," sade Agate-Julie med darr på stämman. "Jag äger a par svarta strumpor, b par vita och c par grå, där $a \geq b \geq c \geq 1$, men de låg ju alla i en förskräcklig

oordning i byrålådan, och jag var därför nödd och tvungen, att plocka till mig två strumpor på måfå.”

“Men kära Agate-Julie, det problemet kunde du ha löst med elementär kombinatorik,” sade Marie-Louise beskäftigt. “Har du aldrig hört talas om Lådprincipen, söta du?”

Hur många strumpor måste Agate-Julie plocka upp i mörkret för att vara säker om, att få ett par i samma färg?

- (b) “Men ack, det var långt värre än så,” suckade Agate-Julie. Hon visade fram sina handskar, vilka, även de, hade olika färg.

“Men sötaste, lilla Agate-Julie,” sade Jeanette beklagande, “du menar inte, att du färdats genom staden i omaka strumpor och handskar?”

“Jag visste icke, hur jag skulle bära mig åt,” sade Agate-Julie bedrövat. “Jag har p par svarta handskar, q par vita och r par grå, med $p \geq q \geq r \geq 1$. Men dessa låg ju, precis som strumporna, blandade huller om buller, och jag begrep alls icke, hur jag skulle bära mig åt, för att plocka fram två i samma färg, när jag ju inte såg ett jota.”

“Håll ordning på torpet,” sade Jeanette barskt. “Sortera dina ägodelar, då det är ljust ute! Men det är väl för mycket begärt, kan jag tro.”

“Detta är ett knivigare problem, det medges,” sade Marie-Louise. “I mörkret skulle du förstås kunna göra åtskillnad på vänster- och högerhandskar genom att helt enkelt prova dem?”

Agate-Julie spärrade förskräckt upp ögonen och såg svimfärdig ut.

“Men den möjligheten tänkte du väl inte på i ditt förvirrade tillstånd,” återtog Marie-Louise. “Nå! Men en lösning finns det likväl!”

Hur många handskar måste Agate-Julie plocka upp i mörkret för att vara säker om, att få ett par, en vänster- och en högerhandske, i samma färg, och vi alltså antar, att hon *inte* kan känna skillnad på vänster- och högerhandskar?

På båda uppgifterna måste det visas, dels att det angivna antalet plagg räcker för att garantera ett par i samma färg, dels att man *inte* kan klara sig med färre.