KOMBINATORIK

Xantcha

Lösningar 10 juni 2014

1. (a) 13 olika objekt skall fördelas på 4 olika lådor, vilket går på 4^{13} sätt.
   (b) 13 lika objekt skall fördelas på 4 olika lådor, vilket går på $\binom{13+4-1}{13} = \binom{16}{13} = 560$ sätt.
   (c) 13 olika objekt skall fördelas på 4 olika lådor, med ingen låda tom, vilket går på

$$\begin{aligned} 4!S(13,4) &= 4^{13} - \binom{4}{3}3^{13} + \binom{4}{2}2^{13} - \binom{4}{1}1^{13} \\ &= 4^{13} - 4\cdot 3^{13} + 6\cdot 2^{13} - 4\cdot 1^{13} \end{aligned}$$

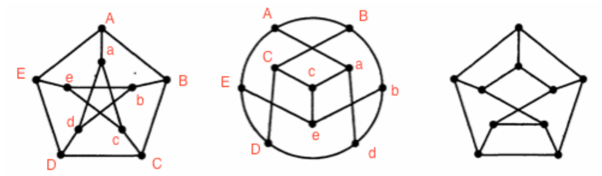
   sätt.

2. Låt A_i beteckna mängden av de fördelningar, där dam nummer i (där $1 \leqslant i \leqslant 3$) erhåller en hel svit i någon av de fyra färgerna. Då gäller att

$$\begin{aligned} |A_i| &= 4\cdot\binom{39}{13}\binom{26}{13} \\ |A_i \cap A_j| &= 4\cdot 3\cdot\binom{26}{13} \\ |A_1\cap A_2\cap A_3| &= 4\cdot 3\cdot 2. \end{aligned}$$

   Enligt Principen om inklusion och exklusion är antalet möjligheter

$$\begin{aligned} \sum|A_i| - \sum|A_i\cap A_j| + |A_1\cap A_2\cap A_3| &= 3\cdot 4\binom{39}{13}\binom{26}{13} - 3\cdot 12\binom{26}{13} + 24 \\ &= 12\binom{39}{13}\binom{26}{13} - 36\binom{26}{13} + 24. \end{aligned}$$



Figur 1: Problem 4.

3. Svaret ges av koefficienten för $\frac{x^n}{n!}$ i den exponentiella genererande funktionen

$$\begin{aligned}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^5&\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\\&=e^{5x}\frac{e^x-e^{-x}}{2}(e^x-1)=\frac{1}{2}(e^{7x}-e^{6x}-e^{5x}+e^{4x})\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(7x)^n}{n!}-\frac{(6x)^n}{n!}-\frac{(5x)^n}{n!}+\frac{(4x)^n}{n!}\right),\end{aligned}$$

som är $\frac{1}{2}(7^n-6^n-5^n+4^n)$.

4. Agate-Julies graf innehåller cykler av längd 4, vilket de övriga graferna inte gör. Däremot är Jeanettes och Marie-Louises grafer isomorfa; se Figur 1.

5. (a) Placera först ut Jeanette någonstans kring bordet. De övriga nio personerna kan placeras relativt henne på $9! = 362,880$ sätt.

   (b) Placera först ut Jeanette. De övriga fyra damerna kan placeras på $4!$ sätt och herrarna på $5!$ sätt. Svaret är $4!\cdot 5! = 2,880$ sätt.

   (c) Placera först ut Jeanette. De övriga fyra damerna kan placeras på $4!$ sätt. Jean-Luc kan nu placeras på 3 sätt, och de övriga fyra herrarna på $4!$ sätt. Svaret är $3\cdot(4!)^2 = 1,728$ sätt.

   Alternativt kan man, från de 2,880 sätten i (b), subtrahera de möjligheter som finns, att placera Jean-Luc och Belle-Sophie bredvid varandra. Det finns $2\cdot 4!\cdot 4!$ sådana sätt, ty Jean-Luc och Belle-Sophie kan sitta intill varandra på 2 sätt, varefter de övriga 4 herrarna och 4 damerna kan placeras på $4!$ sätt vardera. Detta ger $2,880-2(4!)^2 = 1,728$.

6. Vi har

$$75-100=T_1-T_0=k(T_0-25)=k(100-25),$$

varav $k = -\frac{1}{15}$. Differensekvationen kan nu omskrivas till

$$T_{n+1} = \frac{14}{15} T_n + \frac{25}{15}.$$

Den homogena lösningen är $T_n^{(h)} = A(\frac{14}{15})^n$ och en partikulärlösning är $T_n^{(p)} = 25$. Den allmänna lösningen är därför

$$T_n = T_n^{(h)} + T_n^{(p)} = A\left(\frac{14}{15}\right)^n + 25.$$

Begynnelsevillkoret $T_0 = 100$ ger slutligen $A = 75$, så att temperaturen ges av formeln

$$T_n = 75\left(\frac{14}{15}\right)^n + 25.$$

Eftersom $(\frac{14}{15})^n \to 0$ då $n \to \infty$, gäller att $T_n \to 25^\circ$ då $n \to \infty$.

7. (a) Agate-Julie måste plocka upp fyra strumpor. Eftersom det finns tre färger, så måste hon då enligt Lådprincipen erhålla två i samma färg.

   Tre strumpor räcker ej, ty hon kan då uppenbarligen få tre olika färger.

   (b) Agate-Julie måste plocka upp $p+q+r+1$ handskar. Paras handskarna ihop i $p+q+r$ jämna par, så måste hon enligt Lådprincipen erhålla två i samma par.

   Det räcker ej med $p+q+r$ handskar, ty hon skulle då kunna erhålla endast högerhandskarna.