KOMBINATORIK

Xantcha

Tentamen 23 augusti 2014

Lösningar. Fullständiga lösningar skall redovisas på varje problem. Enbart räkningar utan förklarande text kan aldrig ge mer än halv poäng på en uppgift.

Svar. Svaren skall förenklas så långt det går, men får dock innehålla outräknade binomialkoefficienter, fakulteter eller potenser, förutsatt att talen utskrivna innehåller fler än fyra siffror i tiosystemet.

Betyg. Varje problem är värt 6 poäng. Betygen 3, 4 och 5 svarar ungefärligen mot 18, 25 respektive 32 poäng, ehuru poängen allenast är att betrakta som vägledande vid betygsättningen.

De fyra vännerna Qimh, Daniel, Toni och Anders församlas en afton hemma hos Daniel att spela det urgamla kinesiska spelet Mah Jong.

1. Mah Jong spelas med brickor i tre sviter — bambu, ringar och symboler — som har valörer från 1 till 9. Det finns fyra identiska brickor av varje slag (alltså fyra stycken *7 bambu*, etc.).

   Målet för spelaren är, att kombinera de 14 brickor han har på handen enligt vissa förutbestämda mönster. Ett sådant vinnande mönster är *Fåglar sjunger i harmoni*, då de 14 brickorna är kombinerade till *fyra tripletter* och *ett par*, exempelvis: tre stycken *7 bambu*, tre stycken *3 ringar*, tre stycken *9 ringar*, tre stycken *8 symboler* och två stycken *1 bambu*.

   (Det finns fler sorters brickor, som förekommer i de följande problemen, men i denna uppgift koncentrerar vi oss på de tre sviterna ovan.)

   (a) Hur många sätt finns det att vinna på *Fåglar sjunger i harmoni*?

   (b) Hur många sätt finns det, om alla tre sviterna (bambu, ringar, symboler) skall finnas representerade?

2. I Mah Jong ingår även åtta bonusbrickor: fyra brickor med olika blommor (plommon, orkidé, krysantemum och bambu) och fyra brickor representerande de fyra årstiderna.

   (a) Hur många sätt finns det att fördela samtliga åtta bonusbrickor på de fyra spelarna?

   (b) Hur många sätt finns det, om varje spelare skall erhålla minst en bonusbricka?

3. Betrakta *sammanhängande* grafer på fyra noder, där öglor och multipla bågar ej är tillåtna. (En sådan graf skulle, exempelvis, kunna modellera vilka par av de fyra ynglingarna, som pussat varandra.)

   Besvara följande frågor. Svaren skall motiveras.

   (a) Existerar en sådan graf, som har varken en Hamilton-cykel eller en Euler-cykel?

   (b) Existerar en sådan graf, som har en Hamilton-cykel, men ej en Euler-cykel?

   (c) Existerar en sådan graf, som har en Euler-cykel, men ej en Hamilton-cykel?

   (d) Existerar en sådan graf, som ej är planär?

4. I pausen går Daniel att koka the. Toni blir otålig och börjar stapla brickor till ett torn. Han väljer endast brickor med de fyra *vindarna* (öster, norr, väster, söder) och de tre *drakarna* (vit, röd, grön), och han bygger tornet med stadig hand så, att det ej följer två drakar på varandra, av samma *eller* olika färg.

   Om vi antar, att det finns obegränsat antal brickor av vart slag, hur många sätt finns det för Toni att bygga ett sådant torn av 2014 brickor? (Daniel har högt i tak.) Lös problemet genom att ställa upp och lösa en differensekvation.

5. Anders förströr sig också med att leka med brickorna. Han plockar med sexton brickor, nämligen *1–9 bambu* och *1–7 ringar*.

   (a) På hur många sätt kan Anders arrangera dessa brickor i en sluten ring på bordet?

   (b) Visa, att hur Anders än konstruerar denna ring, så kommer det att finnas två bambubrickor mitt emot varandra i ringen.

6. Daniel serverar nu fika. Han har bakat tolv identiska kolakakor, som han bjuder runt. Qimh medför i sin tur en ask med tolv identiska *chouquetter* han påstår sig ha “bakat”. Sällskapet misstänker dessa vara köpta å konditori, ehuru de är för finkänsliga att låtsas om något.

   På hur många sätt kan dessa 24 kakor fördelas på de fyra ynglingarna, så att alla får minst en och högst sex av vardera sorten? Lös problemet med genererande funktion.

7. Under spelandets gång roar Daniel sina gäster med en historia, om hur han bjudit in sina $2n-1$ vänner till middag.

   “Det märkvärdiga var,” säger han, “att jag lyckades placera oss $2n$ personer kring ett runt bord på ett så finurligt vis, att varje person kände sina bägge bordsgrannar sedan tidigare.”

   Anders och Toni visar sin beundran för sådan snillrikhet, men Qimh, som inte lyckats vinna en enda rond under kvällen, säger: “Det var då inget att vara mallig över. Jag gissar, att var och en av dina vänner redan kände minst hälften av det övriga sällskapet?”

   Daniel kan bekräfta detta, och Qimh fortfar: “Nå, givet detta, så följer ur teorien för grafer, att den bordsplacering du föreslår alltid är möjlig.”

   Bevisa detta påstående.