KOMBINATORIK

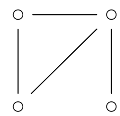
Xantcha

Lösningar 23 augusti 2014

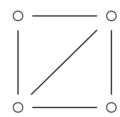
1. (a) Eftersom det endast finns fyra brickor av vart slag, så måste de fyra tripletterna och paret bildas med olika typer av brickor. Det finns 27 olika brickor. Välj först vilka 4 typer som skall ingå i tripletterna på $\binom{27}{4}$ sätt; välj sedan typen för paret bland de återstående 23 typerna. Svaret är
$$\binom{27}{4} \cdot 23 = 403{,}650.$$
   (b) Låt U beteckna mängden av alla de möjliga kombinationer, som räknades fram i (a). Låt A_i, för $i = 1, 2, 3$, beteckna de kombinationer, som ej innehåller svit nummer i. På samma sätt som i (a) fås att
$$|A_i| = \binom{18}{4} \cdot 14 = 42{,}840$$
$$|A_i \cap A_j| = \binom{9}{4} \cdot 5 = 630.$$
   Enligt Principen om inklusion och exklusion är det sökta svaret
$$\begin{aligned} |\complement(A_1 \cup A_2 \cup A_3)| &= |U| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 403{,}650 - 3 \cdot 42{,}840 + 3 \cdot 630 = 277{,}020. \end{aligned}$$

2. (a) Det finns $4^8 = 65{,}536$ sätt.
   (b) Det finns
$$4!S(8,4) = 4^8 - \binom{4}{3}3^8 + \binom{4}{2}2^8 - \binom{4}{1}1^8 = 40{,}824$$
   sätt.

3. (a) Följande graf har varken en Hamilton-cykel (nod av grad 1) eller en Euler-cykel (noder av udda grad):



(b) Följande graf har en Hamilton-cykel (uppenbarligen), men ej en Euler-cykel (noder av udda grad):



(c) Nej. Om grafen G på 4 noder har en Euler-cykel, skall alla dess noder ha jämn grad, det vill säga 0 eller 2. Att G antas vara sammanhängande implicerar att 0 är uteslutet. Alla noder har därför grad 2, och G är cykeln C_4. Men denna har både Euler- och Hamilton-cykel.

(Alternativt kan man konstruera alla möjliga 11 grafer på 4 noder och verifiera, att ingendera uppfyller villkoren.)

(d) Nej, ty den fullständiga grafen K_4 är planär och detsamma gäller varje delgraf.

4. Låt a_n beteckna antalet torn med n brickor, som kan byggas enligt specifikationerna. Låt d_n beteckna antalet torn, som slutar med en drake, och v_n antalet torn, som slutar med en vind. Då inses enkelt, att

$$a_n = d_n + v_n, \qquad v_n = 4a_{n-1}, \qquad d_n = 3v_{n-1},$$

och följaktligen erhålles differensekvationen

$$a_n = d_n + v_n = 3v_{n-1} + 4a_{n-1} = 12a_{n-2} + 4a_{n-1}.$$

Karakteristiska ekvationen $\lambda^2 = 12+4\lambda$ har lösningarna $\lambda = 6, -2$, varför allmänna lösningen är

$$a_n = A6^n + B(-2)^n.$$

Begynnelsevillkoren $a_0 = 1$ och $a_1 = 7$ ger $A = \frac{9}{8}$ och $B = -\frac{1}{8}$, så att lösningen i detta fall är

$$a_n = \frac{9}{8}6^n - \frac{1}{8}(-2)^n.$$

Antalet torn med 2014 brickor är således

$$a_{2014} = \frac{9}{8}6^{2014} - \frac{1}{8}(-2)^{2014} = \frac{9}{8}6^{2014} - \frac{1}{8}2^{2014}.$$

5. (a) Detta går på 15! sätt.

   (b) Låt duvorna vara de 9 bambubrickorna och duvslagen de 8 paren och motsatta brickor. Enligt Duvslagsprincipen kommer det att hamna två bambubrickor i samma duvslag.

6. På grund av symmetri räcker det, att studera hur de 12 kolakakorna kan fördelas. Ordinära genererande funktionen är

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4 = x^4(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4 == x^4\frac{(1-x^6)^4}{(1-x)^4}$$
$$= x^4(1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24})\left(1+\binom{4}{1}x+\binom{5}{2}x^2+\binom{6}{3}x^3+\cdots\right),$$

varur koefficienten för x^{12} avläses till

$$1\cdot\binom{11}{8} - 4\cdot\binom{5}{2} = 125.$$

Eftersom chouquetterna kan fördelas på lika många sätt, är det sökta svaret, enligt Multiplikationsprincipen, $125^2 = 15,625$.

7. En graf med m noder, för vilken gäller att $\deg u + \deg v \geqslant m$ närhelst u och v ej är angränsande noder, har alltid en garanterad Hamilton-cykel enligt Ore-villkoret.

   Grafen, som modellerar Daniels vänkrets, har $2n$ noder. Varje nod har, enligt förutsättningarna, grad minst n, så att $\deg u + \deg v \geqslant n+n = 2n$ för alla noder u, v. Den uppfyller alltså Ore-villkoret, och har därför en Hamilton-cykel. Placera nu ut gästerna längs bordet enligt denna Hamilton-cykel.