KOMBINATORIK

Lösningar till tentamen 12 mars 2012

Xantcha

1. —

2. Problemet är ekvivalent med att välja Petters 12 frukter, varav minst en och högst åtta bananer. Vi söker därför koefficienten för x^{12} i den genererande funktionen

$$\begin{aligned}
&(1+x+\cdots+x^7)(1+x+\cdots+x^8)(x+x^2+\cdots+x^8)\\
&\quad=\frac{1-x^8}{1-x}\frac{1-x^9}{1-x}\frac{x-x^9}{1-x}\\
&\quad=\frac{x(1-x^8)^2(1-x^9)}{(1-x)^3}\\
&\quad=x(1-2x^8-x^9+x^{16}+2x^{17}-x^{25})\left(1+\binom{3}{1}x+\binom{4}{2}x^2+\binom{5}{3}x^3+\cdots\right),
\end{aligned}$$

vilken är

$$\binom{13}{11}-2\binom{5}{3}-\binom{4}{2}=52.$$

3. (a) Detta kan ske på $\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}=60$ sätt.

   (b) De fyra djuren till ringen kan väljas på $\binom{6}{4}$ sätt. Dessa fyra djur kan sedan arrangeras cirkulärt på $3!$ sätt. Ringdansen kan alltså ske på $\binom{6}{4}\cdot 3!=90$ sätt.

   (c) Uppdelningen i lag kan ske på $\frac{1}{2}\binom{6}{3}=10$ sätt.

   (d) Utan restriktioner kan bokstäverna arrangeras på $\frac{11!}{4!2!1!1!1!1!1!}=\frac{11!}{48}$ sätt. De 8 symbolerna

   $$\text{OZON, O, O, R, D, I, N, G}$$

   kan permuteras om på $\frac{8!}{2}$ sätt, varför antalet ord utan kombinationen OZON är $\frac{11!}{48}-\frac{8!}{2}$.

4. Sammantaget finns det d_8 sätt att fördela hattarna. Utfallen då Tant Gredelin får Fröken Violetts hatt kan delas upp i två disjunkta grupper.

- Om Fröken Violett i sin tur erhåller Tant Gredelins hatt, kan de resterande hattarna fördelas på d_6 sätt.
- Om Fröken Violett däremot inte erhåller Tant Gredelins hatt, finns d_7 sätt att distribuera hattarna.

Sannolikheten att Tant Gredelin erhåller Fröken Violetts hatt är därför

$$\frac{d_6 + d_7}{d_8} = \frac{265 + 1,854}{14,833} = \frac{2,119}{14,833} = \frac{1}{7}.$$

Som flera studenter fann i sina lösningar, kan detta även inses enklare genom att hattarna fördelats slumpvis. Sannolikheten att Tant Gredelin erhållit Fröken Violetts hatt kan ju inte gärna skilja sig från sannolikheten att hon erhållit någon annan av de sex hattarna (som inte är hennes egen).

5. Beteckna männen i moturs ordning med M_i och kvinnorna med Q_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$. Studera vilka personer som *inte* känner varandra. För männen fördelar sig dessa på en cykel:

$$M_8 - M_3 - M_6 - M_1 - M_4 - M_7 - M_2 - M_5 - M_8,$$

medan kvinnorna splittras upp i två:

$$Q_2 - Q_4 - Q_6 - Q_8 - Q_2 \quad \text{och} \quad Q_1 - Q_3 - Q_5 - Q_7 - Q_1.$$

Bekantskapskretsarna är därför inte isomorfa.

6. Problemet kan formuleras matematiskt som följer. Låt S vara en mängd av sex heltal, som alla ligger mellan 1 och 14. Visa att S har två olika delmängder, vilkas respektive element adderas till samma summa. De två delmängderna skall heller inte överlappa (eftersom Tant Brun vill kunna skänka bort påsarna till två olika systrar), men detta är ingen inskränkning, ty avlägsnar man talen i snittet erhålles två disjunkta mängder, som fortfarande har samma summa.

   Betrakta de $2^6 - 2 = 62$ delmängderna av S med minst ett och högst fem element. Summan av talen i en sådan kan variera från 1 till $14 + 13 + 12 + 11 + 10 = 60$. Enligt Lådprincipen finns därför två stycken delmängder med samma summa, och beviset är klart.

7. Beteckna antalet sätt med a_n. Då gäller att $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, ty betrakta en uppdelning av n på formen

$$p + x_1 + x_2 + \cdots .$$

   Om $p > 2$ bildar

$$p - 1 + x_1 + x_2 + \cdots$$

en uppdelning av $n-1$, och det finns a_{n-1} sådana. Eljest är $p=2$, och

$$x_1 + x_2 + \cdots$$

utgör då en uppdelning av $n-2$, varav det finns a_{n-2} stycken. Eftersom $a_1 = 0 = F_0$ och $a_2 = 1 = F_1$, finns det alltså $a_n = F_{n-1}$ uppdelningar på den sökta formen.

Problemet kan också lösas med hjälp av genererande funktion. Svaret är koefficienten för x^n i summan

$$\begin{aligned}
&(x^2 + x^3 + \cdots) + (x^2 + x^3 + \cdots)^2 + (x^2 + x^3 + \cdots)^3 + \cdots \\
&\quad = \frac{x^2}{1-x} + \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^3 + \cdots \\
&\quad = \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{1-x}} = \frac{x^2}{1-x-x^2},
\end{aligned}$$

vilket är den genererande funktionen för Fibonacciföljden multiplicerad med x. Alltså är

$$\frac{x^2}{1-x-x^2} = x\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n,$$

varav $a_n = F_{n-1}$ åter följer.

8. Problemets grafteoretiska formulering är som följer. Antag att G är en öglefri graf med n noder och k bågar. Visa att om

$$k > \left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

så är G inte tudelad.

Antag motsatsen, alltså att $V(G) = P \sqcup Q$ (disjunkt union), där alla bågar går mellan P och Q. Sätt $|P| = p$ och $|Q| = q$. Villkoret i problemet innebär att

$$k > \left(\frac{p+q}{2}\right)^2.$$

Antalet bågar i den bipartita grafen är dock högst pq, varav

$$pq \geqslant k > \left(\frac{p+q}{2}\right)^2.$$

Detta kan omformas till $(p-q)^2 < 0$, som ju är absurt. Således kan G omöjligtvis vara tudelad.