KOMBINATORIK

Lösningar till tentamen 7 juni 2012

Xantcha

1. (a) —

   (b) Den exponentiella funktionen skall användas, eftersom ordningen av bokstäverna är av betydelse:

$$(1+x)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right).$$

   (c) Koefficienten framför $\frac{x^4}{24}$ räknar antalet ord med fyra bokstäver.

2. Karakteristiska ekvationen är $\lambda^2-2\lambda+2=0$, med rötterna

$$\lambda=1\pm i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

vilket ger den allmänna lösningen

$$r_n=(\sqrt{2})^n\left(A\cos\frac{n\pi}{4}+B\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Begynnelsevillkoret $r_0=r_1=1$ ger

$$\begin{cases}1=A\\ 1=\sqrt{2}\left(\frac{A}{\sqrt{2}}+\frac{B}{\sqrt{2}}\right);\end{cases}$$

alltså $A=1$ och $B=0$. Lösningen är således $r_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}$.

3. (a) Agda kan välja mellan $\binom{7}{1}+\binom{7}{2}=28$ färger, 3 storlekar, 3 former och 4 mottagare. Enligt Multiplikationsprincipen blir antalet möjliga julklappar

$$28\cdot 3\cdot 3\cdot 4=1008.$$

   (b) Antalet Möbiusband till Elsa innehållande färgen indigo är $(1+6)\cdot 3=21$. Om dessa undantages finns det alltså

$$1008-21=987$$

möjliga julklappar.

4. (a) Det finns $\binom{n+5-1}{n} = \binom{n+4}{4}$ sätt att fördela n likadana kattungar på fem gummor.
   (b) Det finns 5^n sätt att fördela n olika kattungar på fem gummor.
   (c) Det finns 4^n sätt att fördela kattungarna på de fyra övriga gummorna, så att Hulda får noll. Om Hulda skall få precis en kattunge, kan denna väljas på n sätt, varefter de övriga $n-1$ kattungarna kan fördelas på 4^{n-1} sätt. Totalt finns det

$$4^n + n4^{n-1} = 4^{n-1}(4+n)$$

   sätt att fördela kattungarna.

5. (a) Detta är den fullständiga grafen på fem noder.
   (b) Låt V beteckna mängden av alla möjliga vägnät, och låt V_i beteckna de vägnät där gumma nummer i är isolerad, det vill säga inga vägar löper till hennes stuga. Vi söker

$$\begin{aligned}\left|\complement(V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5)\right| = |V| - \sum |V_i| + \sum |V_i \cap V_j| \\ - \sum |V_i \cap V_j \cap V_k| \\ + \sum |V_i \cap V_j \cap V_k \cap V_l| \\ - \sum |V_i \cap V_j \cap V_k \cap V_l \cap V_m|\end{aligned}$$

   enligt Principen om Inklusion och Exklusion. Det finns 10 möjliga vägar, så totala antalet vägnät är

$$|V| = 2^{10}.$$

   Om gumma i är isolerad finns bara 6 möjliga vägar att dra, varför

$$|V_i| = 2^6.$$

   På samma sätt fås

$$\begin{aligned}|V_i \cap V_j| &= 2^3 \\ |V_i \cap V_j \cap V_k| &= 2^1 \\ |V_i \cap V_j \cap V_k \cap V_l| &= 2^0 \\ |V_i \cap V_j \cap V_k \cap V_l \cap V_m| &= 2^0,\end{aligned}$$

   och det sökta antalet vägnät är alltså

$$\begin{aligned}\left|\complement(V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5)\right| &= 2^{10} - \binom{5}{1}2^6 + \binom{5}{2}2^3 \\ &\quad - \binom{5}{3}2^1 + \binom{5}{4}2^0 - \binom{5}{5}2^0 \\ &= 1024 - 320 + 80 - 20 + 5 - 1 = 768.\end{aligned}$$

6. (a) Elsa kräver att vägnätet skall ha en Euler-cykel. Hulda kräver att det skall ha en Hamilton-cykel.
   (b) Cykeln med fem noder uppfyller bägge villkoren.
   (c) Stigen med fem noder uppfyller inget av villkoren.
   (d) Tag cykeln med fem noder och drag en sjätte båge mellan två noder, som ej tidigare gränsade till varandra. Denna har uppenbart en Hamilton-cykel, men ingen Euler-cykel, ty två av noderna har grad 3.
   (e) Tag en graf som liknar en "fjäril" eller "fluga": två trianglar sammanfogade i ett hörn. Denna har uppenbarligen en Euler-cykel, men ingen Hamilton-cykel.

7. (a) Genom algebraiska manipulationer fås

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-m} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!} = \frac{n!}{k!}\frac{1}{(n-m)!(m-k)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-m)!m!}\frac{m!}{k!(m-k)!} = \binom{n}{m}\binom{m}{k},$$

   och alltså är

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{m}2^m.$$

   (b) Betrakta följande problem.

   > Låt N beteckna en fix mängd med n element. Hur många par av delmängder M, X finns det, sådana att $X \subseteq M$ och $|M| = m$?

   Svaret på problemet är tydligen högerledet i den givna identiteten, ty $\binom{n}{m}$ räknar antalet M och 2^m antalet $X \subseteq M$.
   För att erhålla vänsterledet, antag att $|X| = k$. Välj först de k elementen i X, som då också måste ligga i M. Välj sedan, bland de återstående $n-k$ elementen i X, de $n-m$ element som *ej* skall vara med i M. Därmed är både M och X specifierade. Dessa två val kan göras på $\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-m}$ sätt, och svaret på problemet fås genom att summera över alla möjliga k.