KOMBINATORIK

Lösningar till tentamen 30 augusti 2012

Xantcha

1. —

2. (a) Kristallerna kan totalt väljas på $\binom{9}{6} = 84$ sätt. Om den indigo och den violetta kristallen båda förekommer, kan resterande fyra kristaller väljas på $\binom{7}{4} = 35$ sätt. Svaret är alltså $84 - 35 = 49$ sätt.

   (b) Kristallerna kan fördelas på $4^6 = 4,096$ sätt.

3. (a) —

   (b) Den exponentiella genererande funktionen för orden är

$$(1+x)^3\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right) = (1+3x+3x^2+x^3)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right).$$

   vari koefficienten för x^4 är

$$3\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 1 = 3.$$

   Det sökta svaret är koefficienten för $\frac{x^4}{24}$, vilken är $24\cdot 3 = 72$.

4. (a) Horoskopen kan fördelas på

$$\begin{aligned} d_7 &= 7!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\right) \\ &= 5,040-5,040+2,520-840+210-42+7-1 = 1,854 \end{aligned}$$

   sätt, så att alla kunder erhåller fel horoskop.

   (b) Horoskopen kan fördelas på

$$\begin{aligned} 7d_6 &= 7\cdot 6!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\right) \\ &= 5,040-5,040+2,520-840+210-42+7 = 1,855 \end{aligned}$$

   sätt, så att alla kunder utom en erhåller fel horoskop.

5. Det handlar om att välja ut n objekt från 3 givna, vilket kan göras på $\binom{n+2}{n} = \binom{n+2}{2}$ sätt.

   Variant. Problemet kan även lösas med genererande funktion. Eftersom vätskornas ordningsföljd redan är bestämd, handlar det allenast om att välja ut antalet klunkar av vardera. Svaret är därför koefficienten för x^n i

$$(1 + x + x^2 + \cdots)^3 = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n.$$

6. Låt prisen för amuletterna vara $x_1, \ldots, x_{20}$ och prisen för skrinen $y_1, \ldots, y_{20}$. Det finns 400 olika par (x_m, y_n), men endast 391 olika summor $x_m + y_n$, ty $1210 \leqslant x_m + y_n \leqslant 1600$. Det följer att det finns två *olika* par (x_m, y_n) och (x_p, y_q) sådana att $x_m + y_n = x_p + y_q$.

   Antag att $x_m = x_p$. Då följer att $y_n = y_q$, och båda skrinen och amuletterna är därför identiska, vilket är en motsägelse. På samma sätt ger $y_n = y_q$ en motsägelse. Följaktligen är $x_m \neq x_p$ och $y_n \neq y_q$, så både skrinen och amuletterna är olika, vilket visar att kunderna kan utföra köpet till belåtenhet.

7. Graferna är isomorfa. Numreras noderna kring den vänstra 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (moturs); så är motsvarande noder kring den högra 1, 6, 4, 2, 7, 5, 3 (moturs).

   Utan att finna en explicit isomorfi, kan man inse detta genom att studera vilka noder som *inte* är förbundna av bågar. "Icke-bågarna" bildar, i bägge graferna, en cykel av längd 7.