KOMBINATORIK

Xantcha

Lösningar till tentamen 18 mars 2013

1. (a) Det finns $\binom{2n}{n}$ sätt att stapla faten i en enda hög stapel, vilken sedan avdelas på mitten i två separata staplar, där den undre ställs till vänster och den övre till höger.

   (b) Det finns nu $\binom{2n-1}{n}$ sätt att bygga en hög stapel, från vilken de n översta faten avskiljes. Det finns nu två sätt att placera ut dessa två staplar i skåpet. Svaret är därför $2\binom{2n-1}{n}$.

2. För köttbullarna är den genererande funktionen

$$\begin{aligned}
&(x^6 + x^7 + \cdots)(x + x^3 + x^5 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + \cdots) \\
&= x^7(1 + x + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + \cdots) \\
&= x^7 \frac{1}{(1-x)^2(1-x^2)} \cdot \frac{1-x^4}{1-x} = x^7 \frac{1+x^2}{(1-x)^3} \\
&= (x^7 + x^9)\left(1 + \binom{3}{1}x + \binom{4}{2}x^2 + \ldots\right),
\end{aligned}$$

där koefficienten för x^{16} är

$$\binom{11}{9} + \binom{9}{7} = 55 + 36 = 91.$$

Korvarnas genererande funktion är

$$\begin{aligned}
&(y^3 + y^4 + \cdots)(1 + y + \cdots)(1 + y + y^2)(1 + y + \cdots) \\
&= y^3(1 + y + \cdots)(1 + y + \cdots)(1 + y + y^2)(1 + y + \cdots) \\
&= \frac{y^3(1 + y + y^2)}{(1-y)^3} = (y^3 + y^4 + y^5)\left(1 + \binom{3}{1}y + \binom{4}{2}y^2 + \cdots\right),
\end{aligned}$$

vari koefficienten för y^{12} är

$$\binom{11}{9} + \binom{10}{8} + \binom{9}{7} = 55 + 45 + 36 = 136.$$

Antalet olika middagsmål är alltså $91 \cdot 136 = 12,376$.

3. Problemet kan omformuleras till att gälla antalet ord som kan bildas av symbolerna

$$\text{aaabbbcccde.}$$

   (a) Det finns

$$\frac{11!}{3!3!3!1!1!} = \frac{11!}{216} = 184,800$$

   sådana ord, och alltså olika arbetsschemata.

   (b) Låt U beteckna mängden av alla ord, och A, B, C de ord där alla a:n, b:n och c:n, respektive, står intill varandra. Enligt Principen om Inklusion och Exklusion är det sökta svaret

$$\begin{aligned}
&|\complement(A \cup B \cup C)| \\
&= |U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| - |A \cap B \cap C| \\
&= \frac{11!}{3!3!3!1!1!} - 3 \cdot \frac{9!}{3!3!1!1!1!} + 3 \cdot \frac{7!}{3!1!1!1!1!} - \frac{5!}{1!1!1!1!1!} \\
&= 184,800 - 3 \cdot 10,080 + 3 \cdot 840 - 120 = 156,960.
\end{aligned}$$

4. Låt r_n beteckna antalet olika beskyllningar. Låt vidare F_n beteckna antalet beskyllningar där den n:te olyckan skylls på Fia och $r_n(j)$ de beskyllningar där den n:te olyckan skylls på skomakarbarn nummer j. Då gäller att

$$\begin{aligned}
r_n &= F_n + r_n(1) + r_n(2) + r_n(3) + r_n(4) + r_n(5) + r_n(6) \\
&= r_{n-1} + (F_{n-1} + r_{n-1}(2) + r_{n-1}(3) + r_{n-1}(4) + r_{n-1}(5) + r_{n-1}(6)) \\
&+ (F_{n-1} + r_{n-1}(1) + r_{n-1}(3) + r_{n-1}(4) + r_{n-1}(5) + r_{n-1}(6)) \\
&+ (F_{n-1} + r_{n-1}(1) + r_{n-1}(2) + r_{n-1}(4) + r_{n-1}(5) + r_{n-1}(6)) \\
&+ (F_{n-1} + r_{n-1}(1) + r_{n-1}(2) + r_{n-1}(3) + r_{n-1}(5) + r_{n-1}(6)) \\
&+ (F_{n-1} + r_{n-1}(1) + r_{n-1}(2) + r_{n-1}(3) + r_{n-1}(4) + r_{n-1}(6)) \\
&+ (F_{n-1} + r_{n-1}(1) + r_{n-1}(2) + r_{n-1}(3) + r_{n-1}(4) + r_{n-1}(5)) \\
&= r_{n-1} + F_{n-1} \\
&+ 5(F_{n-1} + r_{n-1}(1) + r_{n-1}(2) + r_{n-1}(3) + r_{n-1}(4) + r_{n-1}(5) + r_{n-1}(6)) \\
&= r_{n-1} + F_{n-1} + 5r_{n-1} = 6r_{n-1} + r_{n-2}.
\end{aligned}$$

Man kan även inse detta samband på följande vis. Antalet beskyllningar där de två senaste var på två *olika* barn är $6r_{n-1}$, ty man har i så fall precis 6 möjliga barn att skylla på den n:te gången. Om de två senaste beskyllningarna var på *samma* barn, så måste det ha varit Fia bägge gångerna. De tidigare $n-2$ syndabockarna kan utses valfritt på r_{n-2} sätt. Alltså har man, återigen,

$$r_n = 6r_{n-1} + r_{n-2}.$$

Karakteristiska ekvationen är $\lambda^2 = 6\lambda + 1$, med lösningarna $\lambda = 3 \pm \sqrt{10}$, varav erhålles lösningen

$$r_n = A(3+\sqrt{10})^n + B(3-\sqrt{10})^n.$$

Av begynnelsevillkoren fås

$$\begin{cases} 1 = r_0 = A + B \\ 7 = r_1 = A(3+\sqrt{10}) + B(3-\sqrt{10}), \end{cases}$$

vilket ger $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\sqrt{10}$ och $B = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\sqrt{10}$.

Det sökta svaret är således

$$r_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\sqrt{10}\right)(3+\sqrt{10})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\sqrt{10}\right)(3-\sqrt{10})^n.$$

5. Indela rektangeln i 2×7 rutor à 4×3 meter. Enligt Lådprincipen hamnar två maskrosor inom samma ruta, vars diagonal av Pythagoras' sats beräknas till precis 5 meter.

6. (a) Placera först ut en röd lilja i varje kruka. Då återstår $p-q$ blommor, som skall fördelas godtyckligt i q krukor, vilket går på $\binom{q+(p-q)-1}{p-q} = \binom{p-1}{p-q} = \binom{p-1}{q-1}$ sätt.

   (b) Välj först i vilken av de q krukorna den gula liljan skall stå. Placera sedan ut en röd lilja i var och en av de återstående krukorna. Då återstår $p-q+1$ röda blommor, som skall fördelas godtyckligt i q krukor, vilket går på $\binom{q+(p-q+1)-1}{p-q+1} = \binom{p}{q-1}$ sätt. Svaret är alltså $q\binom{p}{q-1}$.

7. Modellera villan med en (multi)graf G. Tillordna varje rum en nod, och inkludera även en speciell nod u svarande mot trädgården, eller "utomhus" om man så vill. Drag sedan en båge mellan två noder för varje dörr som leder mellan motsvarande rum.

   Handskakningslemmat ger nu

$$2|E(G)| = \deg u + \sum_{x \neq u} \deg x = 3 + \sum_{x \neq u} \deg x,$$

varav tydligen följer att summan $\sum_{x \neq u} \deg x$ är udda. Alla talen $\deg x$ kan därför icke vara jämna, vilket bevisar påståendet.