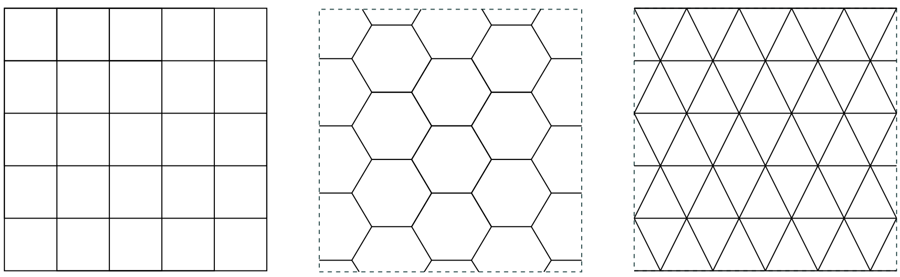
Golv, Tapeter, och andra Mönster

De Arkimediska plattläggningarna

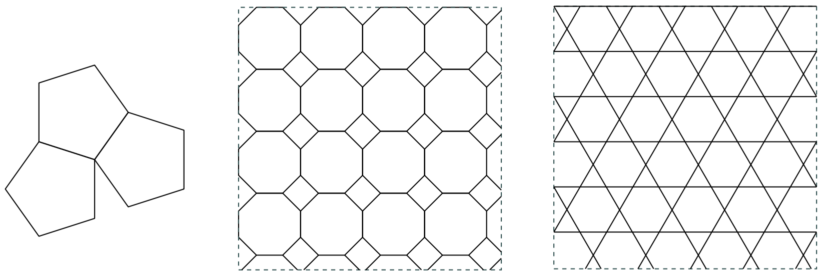
Tänk dig att du ska lägga ett golv. Till ditt förfogande har du plattor av varierande utseende, men alla är så kallade reguljära månghörningar, vilket betyder att alla kanter är lika långa, och alla hörn är likadana. Till exempel har vi liksidiga trianglar, kvadrater, sexhörningar, o.s.v. Alla plattor har dessutom samma kantlängd, t.ex. 10 cm.

Det finns ytterligare två villkor på hur du får lägga golvet. Plattornas hörn måste ligga brevid varann, d.v.s. en platta får inte ha ett hörn mitt på en annan platta. Dessutom måste alla hörn där plattor möts måste ska vara av samma typ. Det får alltså inte i samma golv finnas hörn där 4 kvadrater möts, och hörn där 6 trianglar möts.

På hur många olika sätt kan man då lägga golvet? Något förvånande finns det ganska få sätt. Till och börja med kan vi ju använda bara kvadrater, vilket ger det vanligaste utseendet på ett golv av plattor. Det är också ganska vanligt med golv som består av sexhörningar. Ovanligare är det med golv som består av bara trianglar, men det är också möjligt. Bilden nedan visar dessa tre fall.



Det är inte så svårt att se att dessa är de enda möjliga golven som endast använder en typ av platta. Om man t.ex. försöker använda femhörningar, kommer man att kunna sätta ihop tre st. hörn mot hörn, men det blir då en glipa.



Bara fem hörningar går inte! Fyrkanter och åttahörningar går! Trianglar och sexhörningar går!

Det finns alltså tre sätt med bara en plattyp. Hur många finns det med fler än en typ? Ett vanligt exempel på ett sådant golv är det som matematiker ibland kallar för badrumsplattläggningen, som består av kvadrater och åttahörningar, som visas i figuren ovan. Kan man använda trianglar och sexhörningar? Ja, det går (se ovan), detta mönster kallas för Kagomé, och är vanligt i t.ex. flätade stolssitsar, och som traditionellt mönster på t.ex. tapeter i Japan.

Försök nu komma på några andra möjliga golv! Det finns 6 st. möjligheter kvar, och den otålige kan tjuvtitta på figuren längre ner.

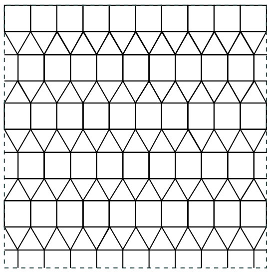
Den första som gjorde en fullständig studie av detta problem var den tyske astronomen (bland annat) Johannes Kepler, i boken *Världens Harmoni*, som kom ut 1619. Han visade att det finns 11 st. möjliga plattläggningar, som han kallade för *de reguljära figurerna*. De tre som består av plattor av en sort, kallade han för *de mest reguljära*. Numera kallas dessa figurer för *de Arkimediska plattläggningarna* (eller ibland de Arkimediska graferna). Det är oklart vem som först använde det namnet, men det kommer troligtvis från att Kepler studerade dessa i samband med de Arkimediska soliderna.

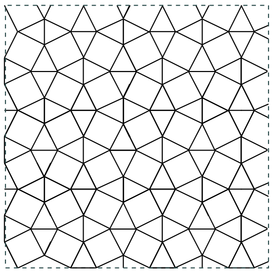
Man brukar ibland namnge dessa med en sifferföljd, som anger hur ett hörn ser ut. Namnet ger också ett recept för att konstruera mönstret. I badrumsläggningen gränsar till varje hörn en fyrkant och två åttahörningar, och den kallas därför också för (4.8.8). I Kagomé gränsar varje hörn till, i ordning, en triangel, en sexhörning, en triangel, och en sexhörning. Kagomé har därför också namnet (3.6.3.6).

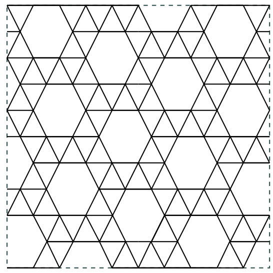
Så till de 6 resterande Arkimediska plattläggningarna. Man kan kombinera trianglar och fyrkanter på två sätt, som (3.3.3.4.4) och som (3.3.4.3.4), se figuren nedan.

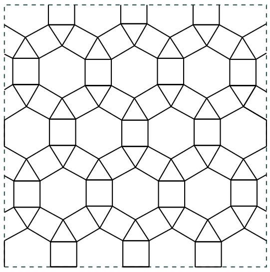
Man kan också kombinera trianglar med sexhörningar, som (3.3.3.3.6). Detta mönster har en speciell egenskap. Det är det enda som ändras när det speglas! För de tio övriga mönstren kan man hitta minst en riktning i vilken man kan spegla figuren, så att spegelbilden ser exakt likadan ut.

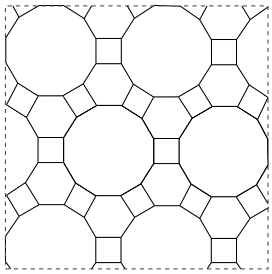
Två mönster som är vanliga i orientalisk mosaik är (3.4.6.4) och (4.6.12). Till sist kan man också använda trianglar och tolvhörningar, det ger mönstret (3.12.12).

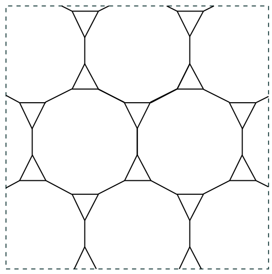

(3.3.3.4.4)


(3.3.4.3.4)


(3.3.3.3.6)

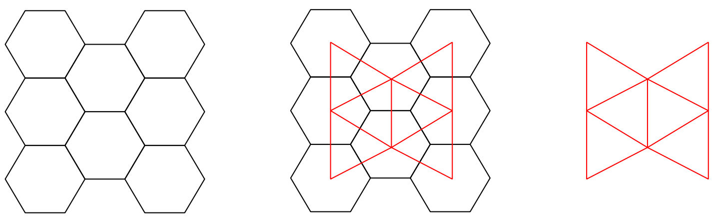

(3.4.6.4)


(4.6.12)

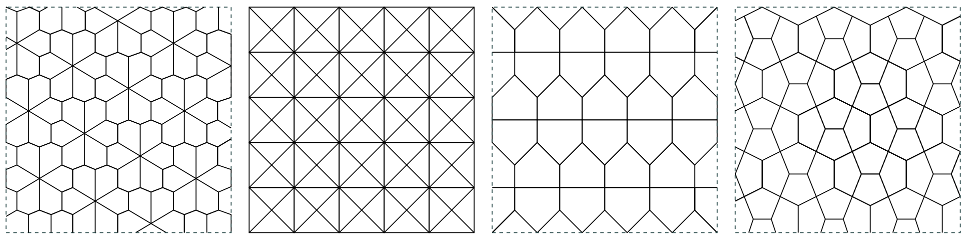

(3.12.12)

De Duala Mönstren

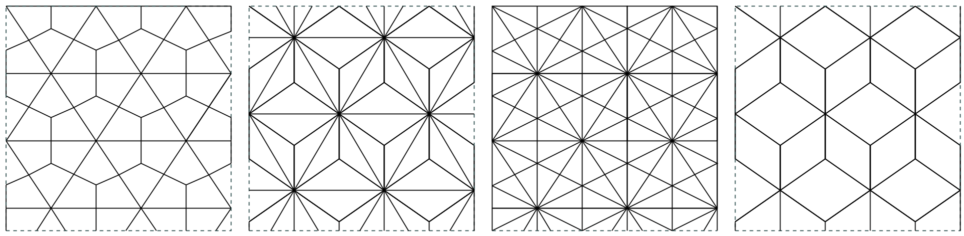
Man kan skapa nya vackra mönster genom att använda det matematiska begreppet om duala grafer. I vårt fall betyder det att vi startar med en plattläggning, och ska skapa ett nytt mönster. Det görs genom att vi täcker över varje hörn med en ny platta. Den nya plattans hörn bestämmer vi ska vara mitt i de angränsade gamla plattorna. Ett exempel på detta visas nedan. Vi startar med sexhörningsmönstret (6.6.6). De nya, röda plattorna blir då trianglar, och det nya mönstret ser man är det med bara trianglar, (3.3.3.3.3.3).



Om vi börjar med det kvadratiska mönstret (4.4.4.4) istället, är det lätt att se det nya (duala) mönstret igen blir kvadratiska mönstret (4.4.4.4). För de övriga åtta plattläggningarna däremot, får vi helt nya mönster, som visas nedan. Försök lista ut vilken Arkimedisk plattläggning man startat med!



Union Jack

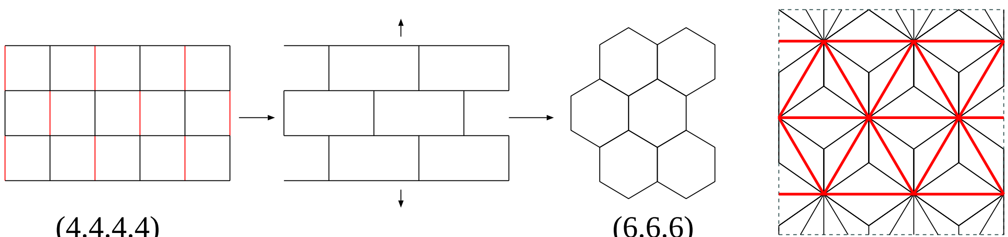


Asanoha Tärning

Dessa mönster kallas inom matematiken för Lavesgitter, efter den tyske kemisten Fritz Laves, som studerade dessa i samband med kristallstrukturer. Flera av dessa är också traditionella japanska mönster, som används på tapeter och på kimonon. Det vanligaste av dessa heter Asanoha, som är japanska för hamplöv.

Vilka ingår i vilka?

Ett intressant problem, som visade sig vara svårare än vad man kunde tro, var att ta reda på vilka mönster (av de totalt 19 som vi behandlat) man kan få från ett annat, genom att i figuren rita in nya kanter, eller genom att sudda ut gamla kanter. Om vi t.ex. i det kvadratiska mönstret suddar ut varannan vertikal kant (de röda kanterna i figuren nedan), får vi ett tegelväggsmönster. Om man drar ut detta (här tillåter vi oss att dra ut och trycka ihop mönstren) ser vi att vi har fått sexhörningsmönstret. Som ett annat exempel ingår det triangulära mönstret i Asanoha (som också består av bara trianglar, men de är inte liksidiga, så Asanoha är inte en Arkimedisk plattläggning!). Detta illustreras också i figuren nedan.



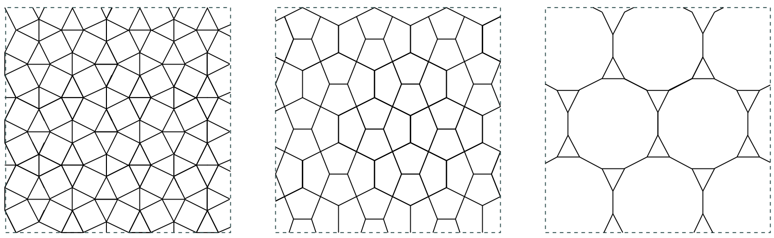
(4.4.4.4) (6.6.6) Asanoha

Prova själv att hitta flera fall där ett mönster ingår i ett annat.

Tillsammans med John C. Wierman, har vi nyligen utrett detta problem fullständigt, d.v.s. vi har inte bara hittat alla fall där ett mönster ingår i ett annat, utan också bevisat att dessa är de enda fallen.[1]

En naturlig fråga är nu varför man är intresserad av detta (förutom att det är ett kul problem om man har rätt läggning)? Det visar sig att det har tillämpningar i vissa sannolikhetsmodeller för spridning av ett ämne i en slumpmässig miljö, så kallad perkolationsteori. I modellen skapas den slumpmässiga miljön genom att vi startar med t.ex. ett av dessa mönster, och tar bort kanter helt slumpmässigt, och ämnet kan sen spridas längs de kvarvarande kanterna.

Vi avslutar med ett problem. **Ett** av de två sista mönstren ingår i det första, men vilket?



Det här mönstret innehåller det här eller det här. Vilket?

[1]Uppsatsen finns på `http://www.math.uu.se/research/pub/Parviainen3.pdf`