Kaffepaus i labyrinten?

Perkolation — matematik för labyrinter och kaffebryggning

Robert Parviainen

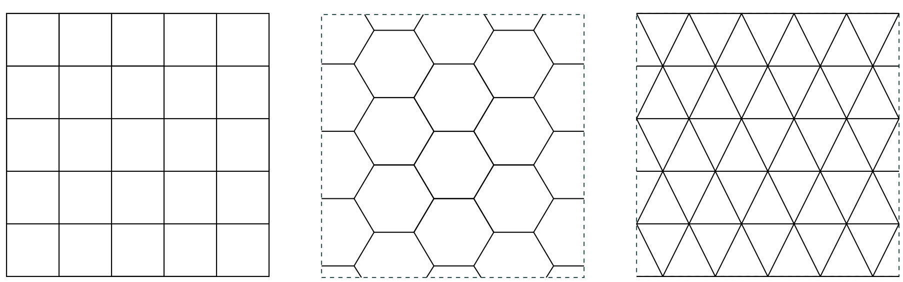
Labyrinter, MS Röj, oljeutsläpp, magnetism, epidemispridning, kaffebryggare. Slumpmässiga termer utan samband? Inte för matematiker intresserade av perkolation.

Vi har väl alla försökt lösa en labyrint. Kanske till och med gått vilse i en. Men varför är matematiker intresserade av labyrinter, och om hur man hittar vägar ut ur dem?

Slumpmässiga labyrinter är bara ett sätt att se på en matematisk modell, *perkolation*, för spridning av ett ämne i en slumpmässig miljö. Samma modell används i olika varianter för att studera: möjligheten att lösa ett parti MS Röj, spridning av olja genom sprickor i berggrunden, spontan magnetism, spridning av epidemier, kaffebryggning i perkulator, och många andra till synes orelaterade problem.

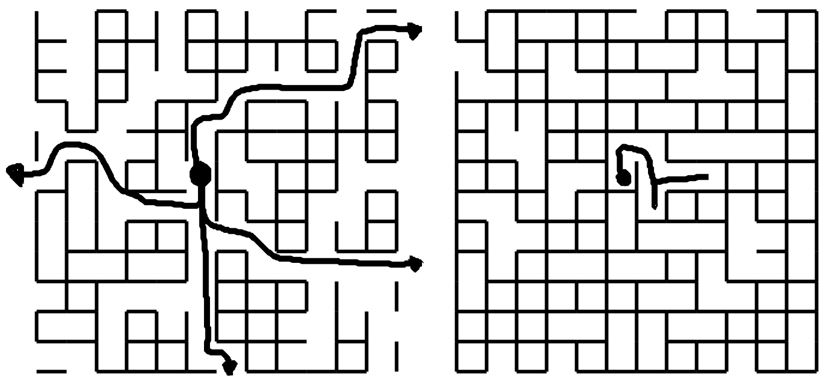
Vi skapar slumpmässiga labyrinter med hjälp av slantsinglingar

Låt oss skapa en slumpmässig labyrint genom att starta med ett regelbundet mönster. Det vanligaste exemplet på startmönster är vanligt rutat papper. Andra tänkbara mönster är sådana där ”rutorna” är sexhörningar (ett bikupemönster) eller trianglar.



Nu ska ta bort linjer på ett slumpmässigt sätt. För varje linje mellan två hörn singlar vi en orättvis slant, som ger krona med en viss sannolikhet p, och klave med sannolikhet $1 - p$. Om vi får klave gör vi inget, men om vi får krona suddar vi ut den linjen. När vi gått igenom alla linjerna, får de som är kvar bilda väggar i labyrinten.

Tänk dig nu att du står mitt i pappret. Finns det en väg ut från labyrinten? Om p är nära 1 borde man ha en hyfsad chans att komma ut, men om p är nära 0 är chansen stor att man bara kommer en liten, liten bit innan det tar stopp. I figuren nedan visas två exempel, ett då sannolikheten att ta bort kanter är stor, och ett då sannolikheten är liten.



Stort p - många kanter suddas ut   Litet p - få kanter suddas ut

Labyrinter intresserar matematiker: Perkolation

Den här slumpmodellen kallas för perkolation, och studerades för första gången på slutet av 50-talet av Simon Broadbent och John M. Hammersley, [**?**]. En, speciellt för matematiker och fysiker, mycket intressant egenskap hos perkolationsmodellen är att den har en så kallad fasövergång.

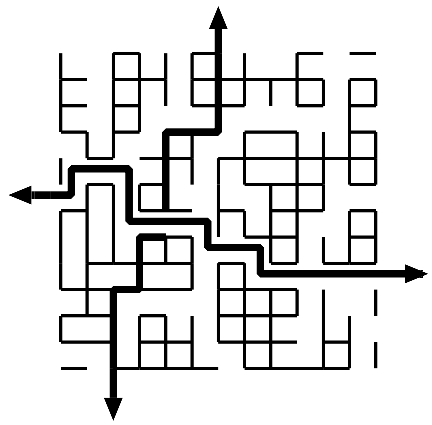
Det finns ett kritiskt värde på p, kallat den kritiska sannolikheten p_c, sådant att om p är mindre än detta kritiska värde, kommer vi aldrig någonsin att hitta ut — i *samtliga* labyrinter genererade med detta p finns det *ingen* väg ut. Men så fort p är större än p_c, finns det en positiv chans att hitta ut.

Att bestämma det exakta värdet på den kritiska sannolikheten p_c blev snabbt ett intressant problem, men det visade sig vara en svår nöt att knäcka. Från början koncentrerade man sig på det kvadratiska fallet (rutat papper). Man trodde sig tidigt veta (sedan början av 60-talet) att den kritiska sannolikheten var exakt $\frac{1}{2}$. Det tog dock ända till 1980 innan Harry Kesten, [**?**], med en mycket komplicerad beräkning bevisade att den kritiska sannolikheten faktiskt är $\frac{1}{2}$. Strax därefter visade John C. Wierman, [**?**], att den kritiska sannolikheten för bikupefallet är $2\sin(\frac{\pi}{18}) \approx 0.3473$, och för fallet med trianglar $1 - 2\sin(\frac{\pi}{18}) \approx 0.6527$.

Än idag har man bara lyckats finna det exakt värdet för ytterligare två mönster. Man har förvisso ganska bra uppskattningar av vad de kritiska värdena är för många olika mönster, men matematiker är inte nöjda med mindre än ett exakt svar.

Två labyrinter samtidigt — ett steg mot lösningen

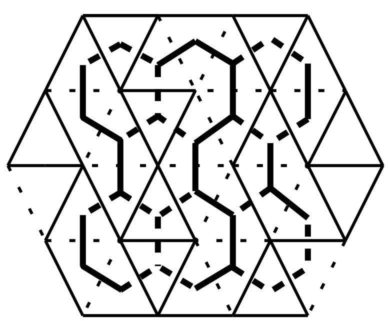
En nyckelidé när man studerar perkolation är att på ett smart sätt utnyttja att vi faktiskt får två labyrinter. Vi kan tänka oss att labyrintens linjer i själva verket är höga murar, som man kan promenera uppe på. En labyrint är då den vanliga, när man går mellan murarna, och den andra, den "duala", den där man går på murarna. Dessa två labyrinter är ju intimt sammankopplade, och hurvida man kommer ut ur den ena beror starkt av hur den andra ser ut. Man kan efter lite eftertanke inse att om man går i labyrinten mellan murarna, och har fastnat, beror detta på att man är omringad av murar. Motsvarande gäller också; om man går på murarna, och inte kommer ut, beror det på att det finns en väg efter marken, runt hela det område man kan nå. Ett annat sätt att se på saken är att om det finns en väg mellan murarna från vänsterkanten till högerkanten, kan det inte finnas en väg på murarna från överkanten till underkanten.



I den vänstra figuren bryts vägen uppifrån ner på murarna *av vägen från vänster till höger* mellan murarna*. I figuren till höger är det streckade området omringat av murar.*

I det kvadratiska fallet är den duala labyrinten i många avseenden lika som den urspungliga — den enda matematiskt intressanta skillnaden är att vi använder sannolikheten $1 - p$ istället för p.

I bikupefallet ser det lite annorlunda ut — den duala labyrinten fås i själva verket då genom att starta med det triangulära mönstret, och använda sannolikheten $1 - p$ istället för p, och motsatt gäller också. Bikupe- och det triangulära mönstret sägs därför vara duala, och det kvadratiska mönstret sägs vara dualt med sig självt.



Med tunna linjer visas en triangulär labyrint. Med feta linjer visas dess duala hexagonala labyrint. I båda fallen visas de borttagna kanterna som streckade linjer.

Det som möjliggjorde bestämningen av de kritiska sannolikheterna i de fem lösta fallen, var det rimliga, men oerhört svårbevisade faktumet att summan av de kritiska sannolikheterna för ett mönster och dess duala mönster är 1. Det följer direkt att kritiska sannolikheten för det kvadratiska mönstret är $\frac{1}{2}$. För de övriga fyra fallen behövs ytterligare ett knep — den för elektronikkunniga kända stjärn-triangeltransformationen.

För samtliga övriga möster är den kritiska sannolikheten alltså okänd, trots idogt arbete av många framstående forskare. Men snart kanske någon får en lysande idé, och då…

Referenser

[1] Simon R. Broadbent and John M. Hammersley. Percolation processes I. Crystals and mazes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53**, 629–641, 1957.

[2] Harry Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$. *Comm. Math. Phsy.* **74**(1), 41–59, 1980.

[3] John C. Wierman. Bond percolation on honeycomb and triangular lattices. *Adv. in Appl. Probab.* **13**(2), 298–313, 1981.