UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Ryszard Rubinsztein

ALGEBRA och GEOMETRI
för E1, F1, Q1

Höstterminen 2012

Tentamensförberedande uppgift 1

1. Visa att för alla heltal $n \geq 1$ och alla reella tal $x \neq 1$ gäller att

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \quad .$$

2. Bevisa olikheten

$$\sum_{k=1}^{n} k! \geq n! \, \frac{n}{n-1}$$

för alla heltal $n \geq 3$. (Obs: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$)

3. (a) Vilka villkor måste talen b_1, b_2, b_3, b_4 uppfylla för att ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 & - & 5x_4 & + & 2x_5 & = & b_1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & b_2 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & - & 7x_3 & - & 8x_4 & + & x_5 & = & b_3 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & b_4 \end{array} \right.$$

skall ha någon lösning?

(b) Lös ekvationssystemet för $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, 2, 1, 2)$.

4. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & (a+1)y & + & z & = & a \\ ax & + & 2y & + & z & = & 1 \\ (a+1)x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array} \right.$$

för alla värden på den reella konstanten a.

5. För vilka värden på den reella konstanten b är matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

inverterbar? Bestäm B^{-1} för dessa värden på b.

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Lös matrisekvationen

$$(A + DXB)^{-1} = C.$$

7. Lös ekvationen

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

8. Lös ekvationen

$$(1+2i)z^2 - (7+4i)z + 15 + 5i = 0 \ .$$

Facit:

3. (a) Ekvationssystemet har någon lösning $\Leftrightarrow \ 3b_1 + b_2 - b_3 - 2b_4 = 0$.
(b) $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (9 - s + t, 5 - 2s - t, s, t, -1), \ s, t \in \mathbb{R}$.

4. Om $a \neq -2, 1 : \ (x, y, z) = \left(-\frac{3}{a+2}, \ \frac{a-1}{a+2}, \ 2\right)$,
om $a = 1 : \ (x, y, z) = (t, 0, 1-t), \ t \in \mathbb{R}$,
om $a = -2 :$ inga lösningar.

5. B är inverterbar $\Leftrightarrow \ b \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Om $b \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$B^{-1} = \frac{1}{1-2b^2}\begin{pmatrix} 1-b^2 & -b & b^2 \\ -b & 1 & -b \\ b^2 & -b & 1-b^2 \end{pmatrix}$$

6.

$$X = \begin{pmatrix} -14 & 14 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Rötterna $z_1 = 2 - \sqrt{3}, \ z_2 = -2 - \sqrt{3}, \ z_3 = \sqrt{3}, \ z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. Rötterna $z_1 = 2 + i, \ z_2 = 1 - 3i$.