

Tentamensförberedande uppgift 2

Obs: I alla geometriska uppgifter nedan förutsätter man ett ON-koordinatsystem.

1. En av diagonalerna i en parallelogram har ändpunkterna $Q = (3, -1, 3)$ och $S = (3, 3, -4)$. Det ena av de återstående hörnen är i punkten $P = (1, 1, 2)$.

- Finn det återstående hörnet.
- Bestäm på formen $Ax + By + Cz + D = 0$ ekvationen för det plan som innehåller parallelogrammen.
- Bestäm arean av parallelogrammen.
- Bestäm vinkeln mellan sidorna PQ och PS .

2. Låt l_1 vara linjen $(x, y, z) = (2 + 2t, 2 - t, 3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt l_2 vara skärningslinjen mellan planen $x + 2y - z = 0$ och $2x + y + z = 0$.

- Bestäm ekvationen på parameterform för linjen l_2 .
- Bestäm på formen $Ax + By + Cz + D = 0$ ekvationerna för de två parallella plan som innehåller l_1 respektive l_2 .

3. Låt l_1 och l_2 vara de två linjerna i uppgift 2.

- Bestäm ekvationen på parameterform för den linje som skär både l_1 och l_2 vinkelrätt.
- Bestäm avståndet mellan l_1 och l_2 . Finn även de punkter A och B på linjerna l_1 resp. l_2 i vilka detta avstånd antas.

4. Bestäm avståndet från punkten $P = (2, 1, 3)$ till planet $x - 2y - z = 5$. Finn även den punkten i planet som ligger närmast punkten P .

5. Den räta linjen $l : (x, y, z) = (2 + t, 1 + 3t, 3 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, projiceras ortogonalt på planet $x - 2y - z = 5$. Bestäm ekvationen på parameterform för den linje som utgör bilden av l under projektionen.

6. Bestäm avståndet mellan linjen

$$l : \begin{cases} x - 2y - 4z = -7 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

och punkten $P = (1, 1, 3)$. Finn även den punkt på linjen l som ligger närmast punkten P .

7. Linjen $l : (x, y, z) = (1 + 2t, 2 + t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, speglas i planet $\pi : x + y - z = 1$. Finn ekvationen på parameterform av l 's spegelbild.

8. Ekvationen

$$z^4 - (8 + 3i)z^3 + (19 + 8i)z^2 - (48 + 27i)z + 90 = 0$$

har någon rent imaginär rot. Lös ekvationen fullständigt.

9. Ekvationen

$$z^4 - 4z^3 + 10z^2 - 12z + 9 = 0$$

har multipla rötter. Lös ekvationen fullständigt.

Facit:

1. (a) $R = (5, 1, -3)$.

(b) $\pi : 5x + 7y + 4z - 20 = 0$.

(c) Area = $6\sqrt{10}$.

(d) $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

2. (a) $l_2 : (x, y, z) = (-s, s, s), s \in \mathbb{R}$.

(b) $\pi_1 : -2x - 3y + z + 7 = 0$ (planet som innehåller l_1),

$\pi_2 : -2x - 3y + z = 0$ (planet som innehåller l_2).

3. (a) $k : (x, y, z) = (-2 + 2q, 2 + 3q, 2 - q), q \in \mathbb{R}$.

(b) Avståndet = $\frac{1}{2}\sqrt{14}$.

4. Punkten i planet är $S = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Avståndet = $\frac{8}{\sqrt{6}}$.

5. $l' : (x, y, z) = (s, -5 + s, 5 - s), s \in \mathbb{R}$.

6. $Q = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Avståndet är $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

7. $l' : (x, y, z) = (-3 + 4q, q, -4 + 8q), q \in \mathbb{R}$.

8. Rötterna: $-2i, 3i, 6 + 3i, 2 - i$.

9. Rötterna: $z_{1,2} = 1 + i\sqrt{2}$ (dubbel) och $z_{3,4} = 1 - i\sqrt{2}$ (dubbel).