

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) \, dx dy \quad ,$$

där D beskrivs av $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$.

2. Beräkna volymen av den ändliga kropp som avgränsas av ytorna $z = 4x^2 + y^2$ och $z = 4 - 3y^2$.

3. Beräkna volymen av den ändliga kropp som begränsas av ytorna $z = 3x^2 + 4y^2 - 4x$ och $z = -1 + x^2 + 3y^2 + 2y$.

4. I en regelbunden pyramid, vars bottenyta är en kvadrat med sidan 4 m och vars höjd är 1 m, borras vinkelrätt mot bottenytan ett centrerat cirkulärt hål med radien 1 m. Beräkna volymen av det som återstår av pyramiden.

5. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{x + 2y}{1 + (2x - y)^2} \, dx dy \quad ,$$

där D är parallelogrammen med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(2, -1)$, $(2, 4)$ och $(4, 3)$.

6. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D x e^{y^2 + z^2} \, dx dy dz \quad ,$$

där $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y^2 + z^2 \leq 2\}$.

7. Låt D vara området $|x| + |y| \geq 1$. Undersök om den generaliserade integralen

$$\iint_D e^{-|x| - |y|} \, dx dy \quad ,$$

är konvergent, och bestäm i så fall dess värde.

8. Undersök om den generaliserade trippelintegralen

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dx dy dz \quad ,$$

är konvergent, och bestäm i så fall dess värde.

9. Skissera i en figur det område D i första kvadranten av \mathbb{R}^2 som begränsas av kurvorna $x^2 - y^2 = \pm 1$ och $x + y = 1$. Beräkna, om den existerar, integralen

$$\iint_D (x - y)^2 e^{x^2 - y^2} \, dx dy \quad .$$

Facit:

1. $2\pi \left(\frac{3}{2} \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2} \right)$

2. 2π

3. $\pi\sqrt{2}$

4. $\frac{2(8 + \sqrt{2})}{3} - \pi$

5. $10 \arctan(5)$

6. $\pi(e^2 - 1)$

7. $8e^{-1}$ (Konvergent).

8. 4π (Konvergent).

9. $\frac{1}{4}(e^1 - 5e^{-1})$ (Konvergent).