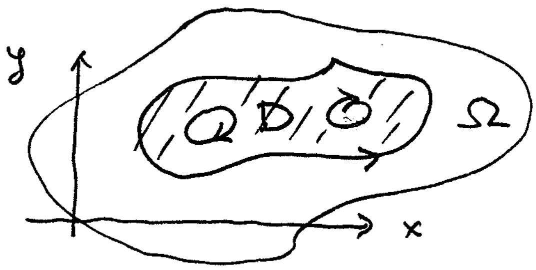
Green's Sats

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ - öppen

$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ - ett vektorfält på Ω av klass C^1.

D - ett kompakt, regelbundet område i Ω s.a. randen ∂D består av ändligt många styckvis C^1-kurvor

Randen ∂D med den positiva orienteringen



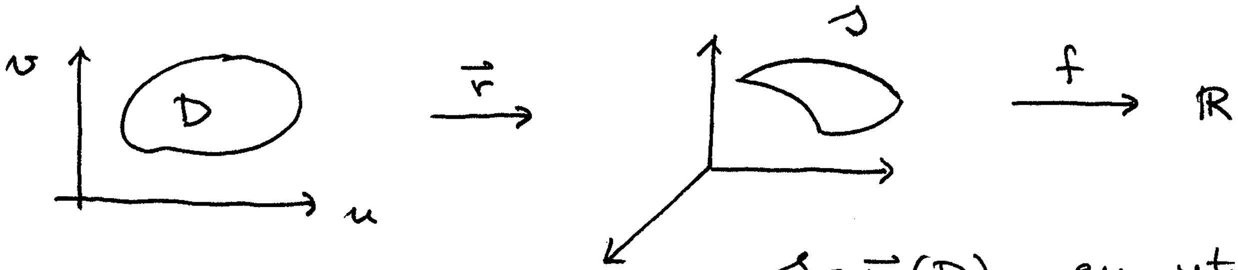
$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{\partial D} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Greens Sats

$$\int_{\partial D} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Ytintegraler av funktioner

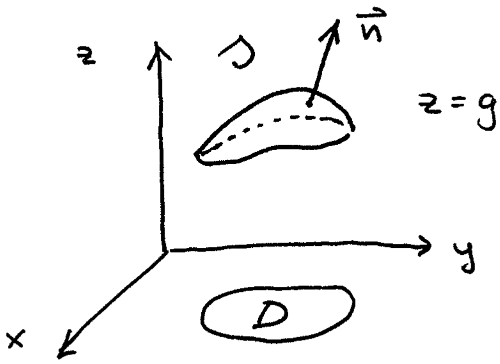


$S = \vec{r}(D)$ - en yta

$f = f(x,y,z)$

$$\boxed{\iint_S f \, dS = \iint_D f(\vec{r}(u,v)) \cdot |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| \, du\,dv}$$

Anm 1: Om $g = g(x,y)$



S = g:s graf

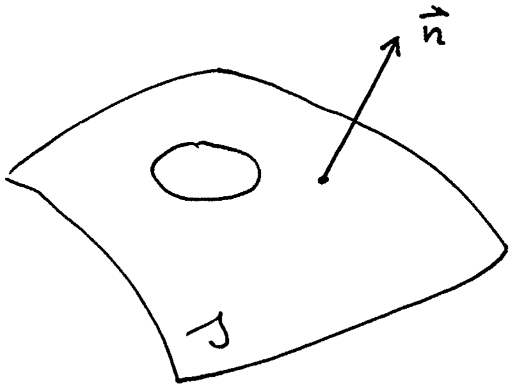
$\vec{n} = (-g'_x, -g'_y, 1)$

- normal till ytan S

$$\Rightarrow \quad \iint_S f \, dS = \iint_D f(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{(g'_x)^2 + (g'_y)^2 + 1} \, dx\,dy =$$

$$= \iint_D f(x,y,z(x,y)) \cdot |\vec{n}| \, dx\,dy$$

där $z(x,y) = g(x,y)$



S – en orienterad yta i $\mathbb{R}^3$ med normalfältet $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$

$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ – ett kontinuerligt vektorfält på S

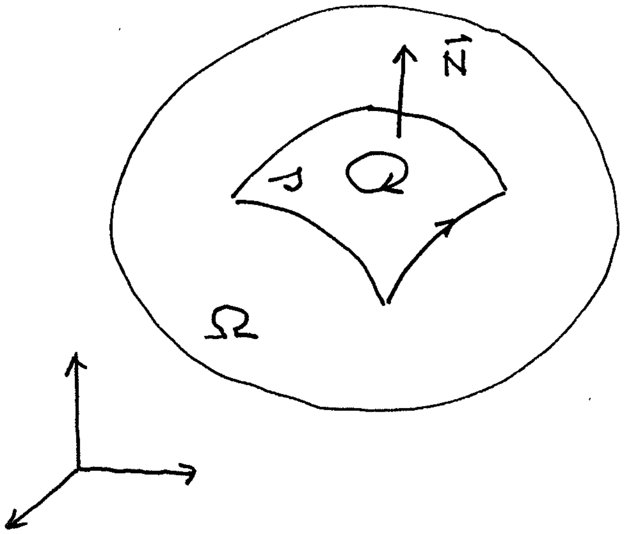
Ytintegralen av $\vec{F}$ över S

$$\iint_S \vec{F} \bullet d\vec{S} := \iint_S (\vec{F} \bullet \vec{n})\, dS =$$

$$= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \bullet (\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v)\, du\, dv$$

om $\vec{r}: D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, är en parametrisering av S (som ger S:s orientering)

Stokes' Sats



$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ - öppen

$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ - ett C^1-vektor-fält på Ω

S - en orienterad yta (av klass C^2)

$\Rightarrow$ ∂S - orienterad kurva

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \text{"}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}\text{"} =$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \mathrm{curl}(\vec{F})$

Sats 2 (Stokes):

$$\int_{\partial S} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \iint_{S} \mathrm{rot}(\vec{F}) \bullet d\vec{S}$$