

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, *Formel- och tabellsamling för grundkursen Sannolikhet och Statistik*, Höstterminen 2009.

Rimliga motiverade approximationer är tillåtna. Eventuella antaganden ska motiveras.

För att erhålla betygen 3, 4 och 5 krävs normalt 18 poäng, 25 poäng respektive 32 poäng inklusive eventuella bonuspoäng.

1. Per har fem batterier, tre av typ A och två av typ B. Batteriernas livslängder är oberoende och exponentialfördelade med medellivslängd 10 timmar för A-batterierna och 20 timmar för B-batterierna.

Per väljer ett batteri slumpmässigt. Bestäm sannolikheten

- (a) att det valda batteriet fungerar mer än 20 timmar.
- (b) att han valt ett B-batteri givet att det valda batteriet fungerar mer än 20 timmar.

2. Vid en tillverkning ställs vikten in till μ gram. De tillverkade enheterna får då vikter som är oberoende och normalfördelade med väntevärde μ och standardavvikelse $\sigma = 8$ gram. Den önskade vikten är $\mu = 500$ gram. För att kontrollera produktionen tar man regelbundet ut 4 enheter, väger dessa och bildar medelvärdet, $\bar{x}$, av vikterna. Om $\bar{x} > K$ stoppas produktionen.

- (a) Bestäm konstanten K så att sannolikheten att produktionen stoppas när $\mu = 500$ är 0.01.
- (b) Med K som i (a), för vilka värden på μ kommer produktionen att stoppas med en sannolikhet som är större än 0.9?

3. Den vanligaste metoden för att datorgenerera normalfördelade slumpstal bygger på addition av likformigt fördelade slumpstal.

Låt $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende slumpvariabler alla likformigt fördelade över intervallet

$(0, 1)$, dvs. $\text{Re}(0, 1)$. Bilda $Y_n := \sum_{k=1}^n X_k$.

- (a) Motivera att Y_n är approximativt normalfördelad (för lämpliga värden på n).
- (b) Bestäm väntevärde och varians för Y_n .
- (c) Ett vanligt val är $n = 12$. Beräkna approximativt $P(Y_{12} > 8)$.
- (d) Beräkna approximativt $P(Y_{24} > 14)$.

4. Du blir erbjuden att spela följande spel. Du får välja ett tal, K , mellan 0 och 1. Därefter genereras ett slumpstal $X \sim \text{Re}(0, 1)$ och Du får beloppet K om $X > K$, annars får Du ingenting.

- (a) Hur ska Du välja K för att maximera din förväntade vinst och vad blir den förväntade vinsten för detta val?
- (b) Det är naturligtvis rimligt att det kostar något att spela ovanstående spel. Antag att det kostar $K/2$ att spela spelet en gång. Vad blir i så fall det optimala valet av K och den motsvarande förväntade vinsten?

5. Låt X_1 och X_2 vara oberoende slumpvariabler, båda likformigt fördelade över intervallet $(0, \theta)$. Man har tillgång till observationer, x_1 och x_2 , från X_1 och X_2 . För att skatta θ väljer man mellan två skattningar:

$$\theta^* = x_1 + x_2 \quad \text{och} \quad \hat{\theta} = \frac{3}{2} \cdot \max(x_1, x_2).$$

- (a) Visa att $Y := \max(X_1, X_2)$ har täthetsfunktion $f_Y(y) = 2y/\theta^2$, för $0 < y < \theta$.
 (b) Visa att både θ^* och $\hat{\theta}$ är väntevärdesriktiga.
 (c) Beräkna skattningarnas varianser. Vilken av skattningarna är effektivast?

Även om Du inte lyckats visa (a) får Du naturligtvis använda resultatet i (b) och (c)!

6. För att avgöra om det finns någon systematisk skillnad mellan två vågar, A och B, vägs 10 föremål på var och en av vågarna med följande resultat:

Föremål	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	172	169	177	179	159	161	166	175	186	166
B	173	170	180	181	160	163	165	177	185	166

Mätfelen kan anses vara oberoende och normalfördelade med konstant varians för var och en av vågarna.

- (a) Formulera en lämplig modell för försöket.
 (b) Beräkna ett 95 % konfidensintervall för den systematiska skillnaden mellan vågarna.
7. En tillverkare av glödlampor påstår att medellivslängden överstiger 100 timmar. För att kontrollera detta påstående testas 100 lampor och av dessa visade sig 60 ha en livslängd över 100 timmar. Låt X vara livslängden för en slumpmässigt vald lampa.
- (a) Bestäm ett approximativt 95 % konfidensintervall för $p := P(X > 100)$.
 (b) Antag att X är exponentialfördelad med intensitet β .
 Bestäm ett approximativt 95 % konfidensintervall för β och ett approximativt 95 % konfidensintervall för medellivslängden, $E(X)$.
 Verkar tillverkarens påstående vara korrekt?
8. En glassfabrikant har upptäckt att det uppkommer en viktförlust vid frysförpackning av glass. För att undersöka sambandet mellan lagringstidens längd och viktförlusten utför han ett experiment, där åtta halvlitersförpackningar lagras olika lång tid (tidsenhet: veckor), varefter viktförlusten bestäms. Resultat:

Lagringstid	5	5	6	6	7	7	8	8
Viktförlust	0.49	0.47	0.60	0.57	0.72	0.73	0.83	0.79

- (a) Ansätt en linjär regressionsmodell och skatta dess parametrar.
 (b) Beräkna modellens förklaringsgrad.
 (c) Beräkna ett 95 % konfidensintervall för den genomsnittliga viktförlusten per vecka.