UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sven Erick Alm

Lösningar till prov i
Sannolikhet och statistik
09–10–19

1. Låt A:="han väljer ett A-batteri", B:="han väljer ett B-batteri", $X_A \sim \text{Exp}(1/10)$ vara livslängden för ett A-batteri och $X_B \sim \text{Exp}(1/20)$ vara livslängden för ett B-batteri. Låt vidare X vara det valda batteriets livslängd.

   (a) $P(X > 20) = P(A) \cdot P(X_A > 20) + P(B) \cdot P(X_B > 20) = \dfrac{3}{5} \cdot e^{-20/10} + \dfrac{2}{5} \cdot e^{-20/20} = \dfrac{3}{5} \cdot e^{-2} + \dfrac{2}{5} \cdot e^{-1} \approx 0.228.$

   (b) $P(B \,|\, X > 20) = \dfrac{B \cap (X > 20)}{P(X > 20)} = \dfrac{\frac{2}{5} \cdot e^{-1}}{\frac{3}{5} \cdot e^{-2} + \frac{2}{5} \cdot e^{-1}} = \dfrac{2e}{2e+3} \approx 0.644.$

2. Medelvärdet, $\bar{x}$, av de fyra vikterna är en observation av $\bar{X} \sim \text{N}(\mu, 8^2/4) = \text{N}(\mu, 16)$.

   (a) $\mu = 500$ ger $0.01 = P(\bar{X} > K) = 1 - P(\bar{X} \le K) = 1 - P\left(\dfrac{\bar{X} - 500}{4} \le \dfrac{K - 500}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{K-500}{4}\right)$, vilket ger $\dfrac{K-500}{4} = \lambda_{0.01} = 2.3263$, så att $K = 500 + 4 \cdot 2.3263 = 509.3052 \approx 509.3$.

   (b) För allmänt μ, $P(\bar{X} > K) = 1 - P(\bar{X} \le K) = 1 - P\left(\dfrac{\bar{X} - \mu}{4} \le \dfrac{K - \mu}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{K-\mu}{4}\right) \ge 0.9$ ger att $\Phi\left(\dfrac{K-\mu}{4}\right) \le 0.1$ eller ekvivalent att $\Phi\left(\dfrac{\mu-K}{4}\right) \ge 0.9$, så att $\frac{\mu-K}{4} \ge \lambda_{0.1} = 1.2816$, vilket ger att $\mu \ge K + 4 \cdot 1.2816 = 509.3052 + 5.1264 = 514.4316 \approx 514.4$.

3. (a) Eftersom $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, där $X_1, X_2, \ldots$ är oberoende och likafördelade så är Y_n approximativt normalfördelad enligt Centrala Gränsvärdessatsen (för tillräckligt stora n).

   (b) $E(Y_n) = n \cdot E(X) = n/2$ och $V(Y_n) = n \cdot V(X) = n/12$.

   (c) För $n = 12$ gäller att $Y_{12} \approx \text{N}(6, 1)$ och $P(Y_{12} > 8) = 1 - P(Y_{12} \le 8) = 1 - P(Y_{12} - 6 \le 8 - 6) \approx 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275 \approx 0.023$.

   (d) $Y_{24} \approx \text{N}(12, 2)$ ger att $P(Y_{24} > 14) = 1 - P(Y_{24} \le 14) = 1 - P(\frac{Y_{24}-12}{\sqrt{2}} \le \frac{14-12}{\sqrt{2}}) \approx 1 - \Phi(2/\sqrt{2}) = 1 - \phi(\sqrt{2}) \approx 1 - \Phi(1.41) = 1 - 0.9207 = 0.0793 \approx 0.079$.

4. Låt Y vara utbetalningen, dvs. $Y = K$ om $X > K$ och $Y = 0$ om $X \le K$, och V vara vinsten, dvs. $V = Y$ i (a)-uppgiften och $V = Y - K/2$ i (b)-uppgiften.

   (a) $E(V) = E(Y) = K \cdot P(X > K) = K(1 - K)$, som har sitt max för $K = 1/2$, vilket ger $E(Y) = 1/4$.

   (b) $E(V) = E(Y) - K/2 = K(1-K) - K/2 = K/2 - K^2$, som har sitt max för $K = 1/4$, vilket ger $E(V) = 1/8 - 1/16 = 1/16$.

Var god vänd!

5. (a) $Y := \max(X_1, X_2)$.
$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\max(X_1, X_2) \le y) = P(X_1 \le y, X_2 \le y) =$
$= P(X_1 \le y) \cdot P(X_2 \le y) = y/\theta \cdot y/\theta = y^2/\theta^2$, vilket ger
$f_Y(y) = F_Y'(y) = 2y/\theta^2$, för $0 < y < \theta$.

(b) $E(\theta^*) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \theta/2 + \theta/2 = \theta$.
$E(Y) = \int_0^\theta y \cdot \frac{2y}{\theta^2}\, dy = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta y^2\, dy = \frac{2}{\theta^2} \cdot \frac{\theta^3}{3} = \frac{2}{3}\cdot\theta$, så att
$E(\hat{\theta}) = E(\frac{3}{2}\cdot Y) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\theta = \theta$, så att båda skattningarna är väntevärdesriktiga.

(c) $V(X_1) = V(X_2) = \theta^2/12$ ger att $V(\theta^*) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \theta^2/12 + \theta^2/12 = \theta^2/6$.
$E(Y^2) = \int_0^\theta y^2 \cdot \frac{2y}{\theta^2}\, dy = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta y^3\, dy = \frac{2}{\theta^2}\cdot\frac{\theta^4}{4} = \frac{\theta^2}{2}$, så att $V(Y) = \frac{\theta^2}{2} - (\frac{2}{3}\cdot\theta)^2 = \frac{\theta^2}{18}$
och $V(\hat{\theta}) = V(\frac{3}{2}\cdot Y) = (\frac{3}{2})^2 \cdot V(Y) = \frac{9}{4}\cdot\frac{\theta^2}{18} = \frac{\theta^2}{8} < \frac{\theta^2}{6} = V(\theta^*)$. $\hat{\theta}$ är effektivare än θ^*.

6. (a) Stickprov i par! Kalla differenserna (B−A) $z_1, \ldots, z_{10}$. Dessa är ett slumpmässigt stickprov från $\mathrm{N}(\Delta, \sigma^2)$, där Δ är den systematiska skillnaden.

(b) $I_\Delta = (\bar{z} \pm t_{0.025}(9) \cdot s_z/\sqrt{10})$. $\bar{z} = 1.00$, $s_z = 4/3 \approx 1.3333$ och $t_{0.025}(9) = 2.26$, vilket ger $I_\Delta = (1.00 \pm 0.95) = (0.05, 1.95)$.

7. Observationen $y = 60$ kommer från slumpvariabeln $Y \sim \mathrm{Bin}(100, p) \approx \mathrm{N}(100p, 100p(1-p))$ (om $100p(1-p) > 5$).
$p^* = y/100 = 0.6$ är en observation av $Y/100 \approx \mathrm{N}(p, p(1-p)/100)$.
(Kontroll: $100p^*(1-p^*) = 24 > 5$.)

(a) $I_p = (p^* \pm \lambda_{0.025} \cdot \sqrt{p^*(1-p^*)/100}) = (0.6 \pm 1.96 \cdot \sqrt{0.6 \cdot 0.4/100}) = (0.6 \pm 0.096) = (0.504, 0.696)$. (Kontroll: För alla $p \in I_p$ gäller att
$100p(1-p) \ge 100 \cdot 0.696 \cdot (1 - 0.696) = 21.16 > 5$).

(b) $X \sim \mathrm{Exp}(\beta)$ ger att $\mu = E(X) = 1/\beta$. $p = P(X > 100) = e^{-100\beta}$, så att
$\beta = -\ln p/100$, vilket är en monotont avtagande funktion av p.
Detta ger att $I_\beta = (-\ln 0.696/100, -\ln 0.504/100) = (0.00362, 0.00685)$.
Eftersom $\mu = 1/\beta$ är en monotont avtagande funktion får vi på samma sätt
$I_\mu = (1/0.00685, 1/0.00362) = (145.9, 275.9)$.

8. Låt x beteckna lagringstiden och y viktförlusten.

(a) Modell: y_i är en observation av $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, där $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_8$ är oberoende $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$.
Beräkningar: $\sum x_i = 52$, $\bar{x} = 6.5$, $\sum x_i^2 = 348$, $S_{xx} = 348 - 52^2/8 = 10$, $\sum y_i = 5.2$, $\bar{y} = 0.65$, $\sum y_i^2 = 3.5102$, $S_{yy} = 3.5102 - 5.2^2/8 = 0.1302$, $\sum x_i y_i = 34.93$, $S_{xy} = 34.93 - 52 \cdot 5.2/8 = 1.13$, vilket ger skattningarna
$\beta^* = S_{xy}/S_{xx} = 1.13/10 = 0.113$ och $\alpha^* = \bar{y} - \beta^* \cdot \bar{x} = 0.65 - 0.113 \cdot 6.5 = -0.0845$.
Den skattade regressionslinjen är alltså $y = -0.0845 + 0.113 \cdot x$.
$Q_0 = SSE = S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx} = 0.1302 - 1.13^2/10 = 0.00251$ vilket ger
$(\sigma^2)^* = s_r^2 = Q_0/6 = 0.0004183$ och $\sigma^* = s_r = \sqrt{0.0004183} = 0.02045$.

(b) $R^2 = 1 - SSE/SST = 1 - Q_0/Syy = 1 - 0.00251/0.1302 = 0.9807$.

(c) $I_\beta = (\beta^* \pm t_{0.025}(6) \cdot s_r/\sqrt{S_{xx}}) = (0.113 \pm 2.45 \cdot 0.02045/\sqrt{10}) = (0.113 \pm 0.016) = (0.097, 0.129)$.