UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Sven Erick Alm
Tel. 471 31 83

Lösningar till
Inlämningsuppgift 1
Sannolikhet och statistik
2010–09–14

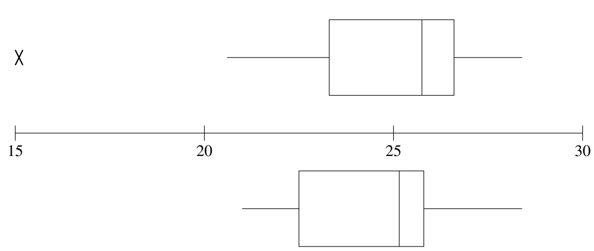
1. (a) Korrelationen mellan längd och vikt borde vara positiv.

   (b) Låt $(u_1, v_1), \ldots, (u_{50}, v_{50})$ vara de korrekta värdena. Då gäller
   $\bar{x} = 179.38 \Rightarrow \sum x_i = 8969 \Rightarrow \sum u_i = 8969 - 80 + 176 = 9065 \Rightarrow \bar{u} = 181.30.$
   På samma sätt
   $\bar{y} = 82.28 \Rightarrow \sum y_i = 4114 \Rightarrow \sum v_i = 4114 - 176 + 80 = 4018 \Rightarrow \bar{v} = 80.36.$
   Vidare
   $s_x = 15.20 \Rightarrow s_x^2 = 231.04 \Rightarrow S_{xx} = 49 \cdot s_x^2 = 11\,320.96 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \sum x_i^2 = S_{xx} + (\sum x_i)^2/50 = 1\,620\,180.18 \Rightarrow \sum u_i^2 = \sum x_i^2 - 80^2 + 176^2 = 1\,644\,756.18 \Rightarrow$
   $\Rightarrow S_{uu} = 1271.68 \Rightarrow s_u^2 = 25.953 \Rightarrow s_u = 5.094.$
   På samma sätt
   $s_y = 14.27 \Rightarrow s_y^2 = 203.6329 \Rightarrow S_{yy} = 49 \cdot s_y^2 = 9\,978.0121 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \sum y_i^2 = S_{yy} + (\sum y_i)^2/50 = 348\,477.9321 \Rightarrow \sum v_i^2 = \sum y_i^2 - 176^2 + 80^2 = 323\,901.9321 \Rightarrow$
   $\Rightarrow S_{vv} = 1015.4521 \Rightarrow s_v^2 = 20.7235 \Rightarrow s_v = 4.552.$
   Slutligen
   $r_{xy} = -0.840 = c_{xy}/(s_x \cdot s_y) \Rightarrow c_{xy} = r_{xy} \cdot s_x \cdot s_y = -182.19936 \Rightarrow$
   $\Rightarrow S_{xy} = 49 \cdot c_{xy} = -8\,927.76864 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \sum u_i \cdot v_i = \sum x_i \cdot y_i = S_{xy} + (\sum x_i \cdot \sum y_i)/50 = 729\,041.5514 \Rightarrow$
   $\Rightarrow S_{uv} = \sum u_i \cdot v_i - (\sum u_i \cdot \sum v_i)/50 = 578.1514 \Rightarrow r_{uv} = S_{uv}/\sqrt{S_u u \cdot S_{vv}} = 0.5088.$

2. Låt $x_1, \ldots, x_{10}$ beteckna värdena för ”Ej cancer” och $y_1, \ldots, y_{10}$ värdena för ”Cancer”.

   (a) $\sum x_i = 243.8$, så att $\bar{x} = 24.38$. $\sum x_i^2 = 6082.02$, så att $S_{xx} = 138.176$ och $s_x^2 = 15.3529$. $(s_x = 3.918)$
   $\sum y_i = 246.1$, så att $\bar{y} = 24.61$. $\sum y_i^2 = 6100.03$, så att $S_{yy} = 43.509$ och $s_y^2 = 4.8343$. $(s_y = 2.199)$

   (b) $x_{\min} = 15.2$, $x_{\max} = 28.4$; $\tilde{x} = (25.3 + 26.2)/2 = 25.75$, $x_u = 23.3$ och $x_o = 26.6$.
   $y_{\min} = 21.0$, $y_{\max} = 28.4$; $\tilde{y} = (24.9 + 25.4)/2 = 25.15$, $y_u = 22.5$ och $y_o = 25.8$.



   Observera att observationen $x = 15.2$ avviker markant från de övriga!

3. (a) $P(A) = 1/6$, $P(B) = 6/36 = 1/6$, $P(C) = 5/36$, $P(D) = 6/36 = 1/6$.

   (b) $A \cap B = (2,2)$ med $P(A \cap B) = 1/36 = 1/6 \cdot 1/6 = P(A) \cdot P(B)$, så att A och B är oberoende.
   $A \cap C = (2,4)$ med $P(A \cap C) = 1/36 \neq 1/6 \cdot 5/36 = P(A) \cdot P(C)$, så att A och C **inte** är oberoende.
   $A \cap D = (2,5)$ med $P(A \cap D) = 1/36 = 1/6 \cdot 1/6 = P(A) \cdot P(D)$, så att A och D är oberoende.
   $B \cap C = (3,3)$ med $P(B \cap C) = 1/36 \neq 1/6 \cdot 5/36 = P(B) \cdot P(C)$, så att A och C **inte** är oberoende.
   $B \cap D = \emptyset$, så att B och D är oförenliga.
   $C \cap D = \emptyset$, så att C och D är oförenliga.

Var god vänd!

4. Inför händelserna: A :="Albert klarar algebratentan", B :="Albert klarar analystentan", C :="Albert klarar linjär algebratentan" och D :="Albert klarar minst två av tentorna".

(a)

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(\text{klara alla tre tentorna}) + P(\text{klara exakt två tentor}) \\
&= P(A \cap B \cap C) + P((A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)) \\
&= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) + P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C) \\
&= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C^c) + P(A) \cdot P(B^c) \cdot P(C) + P(A^c) \cdot P(B) \cdot P(C) \\
&= 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.3 + 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.3 \\
&= 0.168 + 0.392 + 0.072 + 0.042 = 0.674.
\end{aligned}$$

(b)

$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.168 + 0.392 + 0.072}{0.674} = \frac{0.632}{0.674} \approx 0.938.$$