UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Sven Erick Alm
Tel. 471 31 83

Lösningar till
Inlämningsuppgift 2
Sannolikhet och statistik
2010–10–04

1. Inför händelserna: $R :=$ "rättvist", $F :=$ "falskt", $H :=$ krona (head)" och $T :=$ "klave (tail)". Då gäller $P(R) = P(F) = 1/2$.

   (a) $P(H|F) = 1$ och $P(H|R) = 1/2$, så att $P(H) = P(F) \cdot P(H|F) + P(R) \cdot P(H|R) = 3/4$ och
   $$P(R|H) = \frac{P(R \cap H)}{P(H)} = \frac{P(R) \cdot P(H|R)}{P(H)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

   (b) $P(HH|F) = 1$ och $P(HH|R) = 1/4$, så att $P(HH) = P(F) \cdot P(HH|F) + P(R) \cdot P(HH|R) = 5/8$ och
   $$P(R|HH) = \frac{P(R \cap HH)}{P(HH)} = \frac{P(R) \cdot P(HH|R)}{P(HH)} = \frac{1/8}{5/8} = \frac{1}{5}.$$

   (c) Utfallet HHT kan bara erhållas med det rättvisa myntet ($P(HHT|F) = 0$), så att $P(R|HHT) = 1$.

2. Låt $X :=$ "antalet defekta bland de 10 valda".
   Då är $X \sim \text{Hyp}(100, 10, m)$, där $m =$ "antalet defekta i kartongen".

   (a) $m = 5$. $X \sim \text{Hyp}(100, 10, 5)$.
   $$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{110\,983}{190\,120} = 0.584.$$

   (b) $m = 20$. $X \sim \text{Hyp}(100, 10, 20)$.
   $$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{\binom{20}{0} \cdot \binom{80}{10}}{\binom{100}{10}} - \frac{\binom{20}{1} \cdot \binom{80}{9}}{\binom{100}{10}}$$
   $$= 1 - \frac{57\,825\,709}{159\,277\,783} = 0.637.$$

   (c) $m = 10$. $X \sim \text{Hyp}(100, 10, 10)$.
   $$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{\binom{10}{0} \cdot \binom{90}{10}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{90}{9}}{\binom{100}{10}}$$
   $$= \frac{1\,162\,106\,433\,473}{1\,573\,664\,496\,040} = 0.738.$$

   (d) Med m felaktiga är $X \sim \text{Hyp}(100, 10, m)$. Enligt (a) måste $m < 5$ och troligen väsentligt mindre än 5. Prova med $m = 1$.
   $$P(X = 0) = \frac{\binom{1}{0} \cdot \binom{99}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{90}{100} = 0.9,$$
   så för att få $P(X = 0) > 0.9$ krävs att $m = 0$ dvs. att kartongen inte innehåller några felaktiga enheter.

Anm. Urvalsfraktionen är $n/N = 0.1$ dvs. inte < 0.1 som är tumregeln för binomialapproximation av den hypergeometriska fördelningen. Om man ändå binomialapproximerar får man svaren (med hjälp av binomialtabellen):
(a) $0.95^{10} = 0.599$, (b) $1 - 0.3758 = 0.624$, (c) $= 0.7361 = 0.736$ och (d) $m = 1$.

Var god vänd!

3. (a) Sannolikhetsunktionen för X är $p_X(40) = 40/148$, $p_X(33) = 33/148$, $p_X(25) = 25/148$ och $p_X(50) = 50/148$, medan sannolikhetsunktionen för Y är $p_Y(40) = p_Y(33) = p_Y(25) = p_Y(50) = 1/4$. Detta ger

$$E(X) = 40 \cdot \frac{40}{148} + 33 \cdot \frac{33}{148} + 25 \cdot \frac{25}{148} + 50 \cdot \frac{50}{148} = \frac{5814}{148} = 39.28,$$

$$E(Y) = 40 \cdot \frac{1}{4} + 33 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{1}{4} + 50 \cdot \frac{1}{4} = \frac{148}{4} = 37.$$

(b)

$$E(X^2) = 40^2 \cdot \frac{40}{148} + 33^2 \cdot \frac{33}{148} + 25^2 \cdot \frac{25}{148} + 50^2 \cdot \frac{50}{148} = \frac{240\,562}{148} = 1625.42,$$

så att

$$V(X) = 1625.42 - (39.28)^2 = 82.20 \quad (\text{och } D(X) = 9.07).$$

På samma sätt erhålls

$$V(Y) = 40^2 \cdot \frac{1}{4} + 33^2 \cdot \frac{1}{4} + 25^2 \cdot \frac{1}{4} + 50^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5814}{4} = 1453.5,$$

så att

$$V(Y) = 1453.5 - (37)^2 = 84.50 \quad \text{och} \quad D(Y) = 9.19.$$

4. Batterier av typ A: $n_A = 20$, $\mu_A = 50$ och $\sigma_A = 15$.
Batterier av typ B: $n_B = 20$, $\mu_B = 30$ och $\sigma_B = 6$.
Låt $X_A :=$ "sammanlängda livslängden för A-batterierna" och
$X_B :=$ "sammanlängda livslängden för B-batterierna".
Då är $E(X_A) = 20 \cdot 50 = 1000$ och $V(X_A) = 20 \cdot 15^2 = 4500$, och, på samma sätt, $E(X_B) = 20 \cdot 30 = 600$ och $V(X_B) = 20 \cdot 6^2 = 720$.
På grund av Centrala gränsvärdesssatsen gäller dessutom att både X_A och X_B är approximativt normalfördelade: $X_A \approx \mathrm{N}(1000, 4500)$ och $X_B \approx \mathrm{N}(600, 720)$ och därigenom att även summan är approximativt normalfördelad: $X_T := X_A + X_B \approx \mathrm{N}(1000 + 600, 4500 + 720) = \mathrm{N}(1600, 5220)$.

(a)

$$\begin{aligned} P(X_T > 1700) &= 1 - P(X_T \leq 1700) = 1 - \Phi\left(\frac{1700 - 1600}{\sqrt{5220}}\right) = 1 - \Phi(1.38) \\ &= 1 - 0.9162 = 0.0838 = 0.084. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(1550 < X_T < 1650) &= \Phi\left(\frac{1650 - 1600}{\sqrt{5220}}\right) - \Phi\left(\frac{1550 - 1600}{\sqrt{5220}}\right) = \Phi(0.69) - \Phi(-0.69) \\ &= 2 \cdot \Phi(0.69) - 1 = 2 \cdot 0.7549 - 1 = 0.5098 = 0.510. \end{aligned}$$