UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Sven Erick Alm
Tel. 471 31 83

Lösningar till
Inlämningsuppgift 3
Sannolikhet och statistik
2010–10–13

1. $x = 77$ är en observation av $X \sim \text{Hyp}(N, 1000, p) \approx \text{Bin}(1000, p)$ och $y = 124$ är en observation av $Y \sim \text{Hyp}(N, 2000, p) \approx \text{Bin}(2000, p)$, eftersom populationen är stor. X och Y är oberoende slumpvariabler.

   (a) Både $p_A^* = 77/1000 = 0.077$ och $p_B^* = 124/2000 = 0.062$ är väntevärdesriktiga skattningar av p.

   (b) $p_G^* = (p_A^* + p_B^*)/2 = 0.0695$ är en observation av

$$\frac{\frac{X}{1000} + \frac{Y}{2000}}{2} = \frac{X}{2000} + \frac{Y}{4000},$$

   så att

$$E(p_G^*) = \frac{E(X)}{2000} + \frac{E(Y)}{4000} = \frac{1000 \cdot p}{2000} + \frac{2000 \cdot p}{4000} = p,$$

$$V(p_G^*) = \frac{V(X)}{2000^2} + \frac{V(Y)}{4000^2} = \frac{1000 \cdot p(1-p)}{2000^2} + \frac{2000 \cdot p(1-p)}{4000^2} = \frac{p(1-p)}{4000} + \frac{p(1-p)}{8000} = \frac{3p(1-p)}{8000}.$$

   (c) $p_O^* = a \cdot p_A^* + b \cdot p_B^*$ har $E(p_O^*) = a \cdot p + b \cdot p = (a+b) \cdot p$, så att $a + b = 1$ eller $b = 1 - a$.

$$V(p_O^*) = a^2 \cdot \frac{p(1-p)}{1000} + b^2 \cdot \frac{p(1-p)}{2000} = \frac{p(1-p)}{2000} \cdot (2a^2 + b^2) = \frac{p(1-p)}{2000} \cdot (2a^2 + (1-a)^2).$$

   $g(a) := 2a^2 + (1-a)^2$ har minimum då $g'(a) = 6a - 2 = 0$, dvs. då $a = 1/3$.

$$p_O^* = \frac{1}{3} \cdot p_A^* + \frac{2}{3} \cdot p_B^* = \frac{x+y}{3000} = 0.067$$

   är väntevärdesriktig med varians

$$V(p_O^*) = \frac{p(1-p)}{2000} \cdot \left(\frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right) = \frac{p(1-p)}{2000} \cdot \frac{2}{3} = \frac{p(1-p)}{3000}.$$

2. Stickprov i par! Bilda differenserna $y := x_B - x_A$. Detta ger ett stickprov, $y_1, \ldots, y_6$, från $\text{N}(\Delta, \sigma^2)$, där Δ är den systematiska förskjutningen.
   Observationerna: 0.14, 0.20, 0.19, 0.11, 0.25, 0.21 ger
   $\sum y_i = 1.1$, $\bar{y} = 0.1833$,
   $\sum y_i^2 = 0.2144$, $S_{yy} = 0.01273$, $s^2 = 0.002547$ och

$$I_\Delta = \left(\bar{y} \pm t_{0.025}(5) \cdot \frac{s}{\sqrt{6}}\right) = \left(0.1883 \pm 2.5706 \cdot \frac{\sqrt{0.002547}}{\sqrt{6}}\right) = (0.1833 \pm 0.0530) = (0.130\,,\, 0.236).$$

3. $p = P(\text{ingen emission}) = e^{-\lambda}$, så att $\lambda = -\ln p$.

   (a) $x = 76$ är en observation av $X \in \text{Bin}(100, p)$, så att $p^* = \frac{x}{100} = 0.76$, vilket ger $\lambda^* = -\ln 0.76 \approx 0.274$.

   (b)

$$I_p = (p^* \pm \lambda_{0.025} \cdot d(p^*)) = \left(p^* \pm 1.96\sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{100}}\right) = \left(0.76 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.76 \cdot 0.24}{100}}\right)$$
$$= (0.76 \pm 0.0837) = (0.6763\,,\, 0.8437),$$

   vilket ger

$$I_\lambda = (-\ln 0.8437\,,\, -\ln 0.6763) = (0.170\,,\, 0.391).$$

Var god vänd!

4. Låt S vara den korrekta summan och $T := 987\,231$ vara det uppskattade värdet.

Låt vidare $Y :=$ "felet" $= S - T = \sum_{1}^{1000} X_i$, där $X_1, \ldots, X_{1000}$ är oberoende Re$(0,1)$, med $E(X) = 1/2$ och $V(X) = 1/12$, så att $E(Y) = 1000 \cdot \dfrac{1}{2} = 500$ och $V(Y) = 1000 \cdot \dfrac{1}{12} = \dfrac{250}{3}$.

Enligt Centrala gränsvärdessatsen gäller det att $Y \approx \mathrm{N}(500, 250/3)$.

S skattas med $S^* = T + 500 = 987\,731$ och ett konfidensintervall för S, med approximativ konfidensgrad 95 %, ges av

$$I_S = \left(S^* \pm \lambda_{0.025} \cdot \sqrt{\frac{250}{3}} \right) = (987731 \pm 17.9) = (987713\,,\, 987749).$$