UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Sven Erick Alm
Tel. 471 31 83
e-post: sea@math.uu.se

Matematisk statistik
Sannolikhet och statistik
2009–09–08

Korrigering till Alm/Britton: *Stokastik*

Beviset av Sats 3.10 på sidan 74 innehåller flera feltryck och är dessutom inte fullständigt. Här är ett komplett, och förhoppningsvis korrekt, bevis.

I beviset utnyttjas att

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Från definitionen av väntevärde får vi

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=a}^{b} k \cdot p_X(k) = \frac{1}{b-a+1}\sum_{k=a}^{b} k = \frac{1}{b-a+1}\left(\sum_{k=1}^{b} k - \sum_{k=1}^{a-1} k\right) = \frac{1}{b-a+1}\left(\frac{b(b+1)}{2} - \frac{(a-1)a}{2}\right) \\ &= \frac{b^2+b-a^2+a}{2(b-a+1)} = \frac{(b+a)(b-a+1)}{2(b-a+1)} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Observera att detta är tyngpunkten i fördelningen!

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{k=a}^{b} k^2 \cdot p_X(k) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a+1}\left(\sum_{k=1}^{b} k^2 - \sum_{k=1}^{a-1} k^2\right) - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{1}{6(b-a+1)}\big(2b^3+3b^2+b-(2(a-1)^3+3(a-1)^2+(a-1))\big) - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \\ &= \frac{1}{12(b-a+1)}\big(4b^3-4a^3+6b^2+6a^2+2b-2a-3(b-a+1)(a^2+2ab+b^2)\big) \\ &= \frac{1}{12(b-a+1)}\big(b^3-a^3+3ba^2-3ab^2+3b^2+3a^2-6ab+2b-2a\big) \\ &= \frac{1}{12(b-a+1)}\big((b-a)^3+3(b-a)^2+2(b-a)\big) = \frac{b-a}{12(b-a+1)}\big((b-a)^2+3(b-a)+2\big) \\ &= \frac{b-a}{12(b-a+1)}(b-a+1)(b-a+2) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}. \end{aligned}$$

$D(X)$ erhålls som $\sqrt{V(X)}$.