De matematiska begreppens historia

Sten Kaijser

Innehåll

Kapitel 0. *Prolog* **1**
1. Den nya skapelseberättelsen 1
2. Homo Adaptus 2
3. Språket 3
4. Människor och gudar 4
5. En urgammal rit 5
6. Några förutsättningar för denna bok 6

Kapitel 1. *Om historia och matematik* **9**
1. Historieskrivning 9
2. Människans tidevarv 10
3. Utveckling och förändring 11
4. Varför matematik 12
5. Tal 14
6. Cirkeln 15
7. Symmetri 16

Kapitel 2. *De naturliga talen* **20**
1. Konsten att räkna I. 20
2. Konsten att räkna II. 22
3. Konsten att skriva 23
4. Det sexagesimala talsystemet 25
5. Pythagoras sats 27
6. Matematik och vetenskap 29
7. Matematik och mystik 29
8. Stora tal 31
9. Att räkna med bråk I. 35
10. Att räkna med bråk II. 37

Kapitel 3. *Cirkeln* **39**
1. En helig form 39
2. En naturlig form 39
3. Hjulet 39
4. Från Sumer till Hellas 40
5. Thales och det matematiska beviset 41
6. Pythagoras och sfärernas harmoni 42
7. De klassiska problemen 43
8. Platon och idéläran 44
9. Akademin 45
10. Aristoteles 46
11. Alexandria och Museion 47
12. Cirkeln mäter världen 48
13. Arkimedes mäter cirkeln 49
14. Hjulen börjar mala 53

Kapitel 4. *Siffrorna* **55**
1. Pax Romana 55
2. Konsten att räkna III. 56
3. Indiens tidiga historia 56
4. Indisk matematik och vetenskap 58
5. Islam 59
6. Siffrorna når Europa 61
7. Decimalbråken 61

Prolog

1. Den nya skapelseberättelsen

Den värld vi lever i är ett resultat av såväl naturliga processer som av mänsklig aktivitet. Vår bild av den är däremot en rent mänsklig skapelse.

Som barn undrade vi:"Hur var världen innan jag fanns?" Medan vi växer upp får vi olika svar på denna och liknande frågor genom att vi får del av de vuxnas erfarenheter. Så småningom börjar vi ana att världen har funnits länge — länge. Men hur länge och hur började det?

Denna fråga tycks alltid ha funnits med oss. I alla kulturer och hos alla primitiva folk vi stött på och lärt känna så har det funnits skapelseberättelser. Dessa har grundats på erfarenheter och spekulationer. Hos isolerade kulturer som format sin världsbild och sin skapelseberättelse endast utgående från sina egna erfarenheter har det övernaturliga, gudar och onda eller goda andar spelat en stor roll. Samtidigt har den värld de föreställt sig varit ganska liten. Det viktigaste har varit att förklara det egna folkets uppkomst i en (möjligen) evig värld. Ju mer erfarenheten och kunskapen vuxit, ju större har världen blivit och ju mer har skapelseberättelsen behövt förklara.

Idag har vetenskapen givit oss en skapelseberättelse mer fantastisk än någon tidigare. Världen består inte längre av den mark vi lever på, inte av det land vi lever i, inte ens av den jord vi lever på, utan världen består av ett universum som inte är oändligt men som istället är ofattbart stort. Det är ett universum som inte har funnits i all evighet men det har funnits så länge att vi inte kan förstå det. Ändå har vi ett mått. Universum har funnits i 15 miljarder år – eller kanske några miljarder år längre. Universum uppstod av en slump i en stor smäll — Big Bang.[1]

Detta är en skapelseberättelse som våra förfäder aldrig, ens i sin vildaste fantasi skulle ha kunnat föreställa sig. Samtidigt är det en skapelseberättelse som har ett svar på följdfrågorna. "Vad fanns innan allt detta skapades och vad finns utanför världen?" Vetenskapens fantastiska och obegripliga svar är att 'före Big Bang fanns ingenting — inte ens tiden och utanför universum finns ingenting — inte ens tomrummet'.

Även vetenskapens skapelseberättelse grundas på erfarenheter och spekulationer, men dess erfarenheter har vunnits i astronomiska observatorier som har sett miljarder år bakåt i tiden och spekulationerna har bedrivits på det språk som redan Galilei ansåg vara "naturens eget språk — matematiken".

Denna nya världsbild har vuxit fram på ungefär trehundra år — tre århundraden som varit några av de mest omvälvande i jordens historia. Under denna tid har arten *homo sapiens* ("den visa människan"!?) fördubblat sitt antal fem gånger och är nu talrikast av alla däggdjur. Ingen plats på denna jord är längre opåverkad av människan. Från satelliter, osynliga för oss bevakar hon allt liv på jorden. Genom sina elektronmikroskop ser hon in i livets minsta beståndsdelar. På en sekund kan hon sända ett budskap vart som helst på jorden. Och om en timme kan hon ha förintat sig själv och utplånat alla spår efter sig.

Hur började denna utveckling och vilka var de viktigaste stegen? I detta kapitel ska jag göra ett försök att kortfattat beskriva "människans utvecklingshistoria" såsom vi idag ser den.

[1]Big Bang är inte den enda vetenskapliga teorin för att beskriva universums uppkomst och historia, men det är den teori som som ger den mest typiska *skapelse*-berättelsen.

2. Homo Adaptus[2]

För några miljoner år sedan tvingades en apa som anpassat sig för ett liv uppe i träden att leva mer och mer på marken. Det nya livet var hårt och det tycks ha inträffat många katastrofer i artens tidiga historia. Resultatet blev en snabb biologisk utveckling. Hon tvingades röra sig över större områden och bara de som gick och sprang bäst överlevde. Hon samlade ätbara växter och de som kom på att de kunde bära mer om de använde "vidjor" eller "smidiga rötter" för att binda om sina bördor kunde föda upp fler barn. De som var starkare kunde försvara sina revir ända tills några började "beväpna sig". De som kunde meddela sig bäst med varann kunde samordna sin verksamhet bättre. På olika sätt premierades grupper som gick bra på bakbenen, som använde sina händer, som utvecklade talorganen, som lärde sig av erfarenheten och som tänkte. Så småningom utvecklades en art som lärt sig den fantastiska konsten att anpassa sig till nya förhållanden. Detta var den konst hon lärt sig, förmodligen bättre än någon tidigare art i jordens historia. Någon gång under denna utveckling som kanske tog några miljoner år uppstod arten människa.

Som art är människan resultatet av ett stort antal anpassningar, där tidigare arter i utvecklingskedjan i trängda lägen hittat nya nischer för sin överlevnad. Som trädlevande apa hade hon begåvats inte bara med två till gripverktyg omvandlade framben, utan också med framåtriktade ögon. (Vanligen har jagande djur sina ögon framåtriktade för att med precision kunna bedöma sitt bytes läge, medan bytesdjuren, växtätarna, har större behov av ett stort synfält för att i tid kunna upptäcka sina fiender och därför har ögonen riktade åt sidorna. Det finns naturligtvis undantag mot denna regel, exempelvis trillar en apa snart ner ur träden om den inte vet exakt var den ska gripa tag om nästa gren.) Under en (förmodad) period i eller vid havet tycks hon ha sträckt på sig för att simma snabbare, samtidigt som hon förlorade sin päls och lade sig till med underhudsfett. Där lärde hon sig också att reglera sin andning vilket bidrog till att hon senare kunde lära sig att tala. Så småningom lärde hon sig också den nya förmågan att gå på två ben, utan att behöva använda armarna till stöd.

Under utvecklingens gång hade människan förunnats vissa gåvor som tillsammans gav henne unika möjligheter. Hon hade fått goda ögon och öron med vilka hon kunde studera sin omgivning och två precisionsverktyg med vilka hon kunde förändra den. Hon hade fått en mun som inte bara dög till att äta utan också till att tala. Dessutom hade hon lärt sig att samarbeta åtminstone i små grupper. Sist men inte minst hade hon fått en förmåga till medvetet tänkande.

Den nya arten, *homo sapiens*, "den visa människan" som vi helt blygsamt döpt oss själva till, blev allt framgångsrikare i sin kamp för tillvaron. Hon lärde sig att behärska elden och att tillverka redskap och vapen. Med hjälp av elden kunde hon tillaga och äta kött och med vapnens hjälp förvandlades hon från att ha varit ett jagat till att bli ett jagande djur. Ännu effektivare som jägare blev hon när hon lärde sig att använda hundar till hjälp för sin egen jakt. Hon förbättrade sina bostäder och började bygga byar. I dessa kunde hon skydda sig mot farliga rovdjur, så att allt fler av barnen växte upp. Med sina vapen och genom att samarbeta lärde hon sig att besegra och döda alla de djur som kunde hota henne och hennes avkomma. Detta innebar att hon kom att sakna naturliga fiender som kunde begränsa hennes antal, något som ledde till att hon som art blev allt talrikare och att hennes ursprungliga utbredningsområde blev överbefolkat.

Sedan dess har överbefolkningen varit människans största problem. Allt sedan hon blev istånd att döda såväl de största, som de farligaste av djuren i sin

[2] Den anpassbara människan

omgivning så är det tillgången på mat som begränsat människans antal. I många isolerade kulturer runt om i världen lärde hon sig att begränsa sitt antal så att hon i årtusenden kunde bibehålla ett levnadssätt där hon utgjorde en del av det ekologiska systemet. I andra delar där olika kulturer och folkslag ständigt möttes uppstod strider som så småningom utvecklades till regelrätta krig. I sådana delar var en stor befolkning ofta en fördel och det fanns därför ingen anledning att begränsa födelsetalet. Därför har människans antal ständigt vuxit. Tillväxten var långsam men stadig ända tills industrialismen under de senaste århundradena drastiskt ändrade hennes livsbetingelser. Sedan dess har utvecklingen skenat iväg så att antalet människor nu fördubblas på 40 år.

Människan är inte den första framgångsrika arten i jordens historia, och hon är inte heller den första art vars antal endast begränsats av tillgången på föda, men hon har förmodligen varit unik i sin förmåga att hitta nya födokällor och öka tillgången på mat. Liksom framgångsrika arter före henne började hon naturligtvis helt enkelt med att öka sitt utbredningsområde så långt som det var möjligt med de förutsättningar hon hade. Detta innebar för människans del att hon nådde områden där hon riskerade att frysa ihjäl under vintern. Men medan tidigare arter i samma situation endast mycket långsamt kunde öka sitt utbredningsområde genom att genetiskt anpassa sig till förändrade livsbetingelser, så kunde människan göra det genom att istället anpassa sitt beteende. Istället för att lägga sig till med päls så klädde hon sig i sina bytesdjurs. Detta innebar egentligen att hon anpassade miljön (i detta fall luften närmast kroppen) till sina egna förutsättningar. Sedan kunde människan erövra jorden.

Det gick inte fort. En familj eller en grupp flyttade en liten bit, lärde sig vad den nya omgivningen bjöd av mat och av faror. Efter några hundra år började trakten bli överbefolkad och en ny grupp tvingades dra vidare. På det nya området blev det en ny befolkningsökning och åter tvingades några att dra vidare.

Genom sin förmåga att hitta nya födokällor satte hon sig över den levande naturens grundlag — den lag som säger att ingen art får bli för talrik. Om rovdjuren blir för många så får de ont om byten och när växtätarna blir för många så föröder de växtligheten.

Men denna lag gällde inte längre människan. Genom att hon lärde sig att leva på nya födoämnen kunde hon öka sitt antal även i de centrala delerna av sin värld. Då uppstod den situationen att maten inte räckte och det fanns ingenstans att ge sig av. Kanske upptäckte hon att hennes hundar kunde driva en hel flock vilda djur, kanske födde hon upp dödade djurs ungar för att de skulle ge mer mat innan hon åt upp dem. På något sätt upptäckte hon att hon kunde tämja vilda djur. I hennes byar fanns höns och grisar, runt byarna fanns får och getter. I tusentals år kunde hon än en gång öka sitt antal.

Kanske tog det lång tid att utveckla jordbruket. Det kan ha börjat med upptäckten att efter en brand så förändrades floran i den del av skogen som öppnats av elden. Både hon och hennes betesdjur hittade där mer av de växter de föredrog. På olika sätt lärde hon sig sedan att gynna de växter som hon hade störst nytta av. Förmodligen började hon med att rensa ogräs. Så kanske hon petade frön i marken. När det blev ont om föda blev den odlade maten allt betydelsefullare. Hon började bearbeta jorden med hacka och spade och lärde sig mer och mer om vad som gick bäst att odla. På de flesta håll minskade skördarna efter några år och byn fick flytta på sig. Men i några floddalar i Asien och Afrika kom det årliga översvämningar som återgav jorden dess kraft. Där ökade befolkningen alltmer, byarna växte, sysselsättningen differentierades, kampen om utrymmet hårdnade. Ur dessa förhållanden växte alltmer organiserade samhällen fram. Hantverket utvecklades och specialiserades. Handeln blev allt livligare och betydelsefullare.

Nya klasser uppstod. Härskarna blev mäktigare och från att ha varit rövare utanför samhället kunde grupper av beväpnade män förvandlas till soldater i härskarens tjänst.

3. Språket

Förutsättningen för människans erövring av världen var hennes anpassningsförmåga. Denna anpassningsförmåga var av ett alldeles nytt slag. Den berodde inte på att bara de som i något avseende var *genetiskt* bättre rustade för den nya miljön kunde överleva och fortplanta sig. Istället berodde den på hennes uppfinningsrikedom — och på hennes läraktighet.

Förutsättningen för människans läraktighet var barnens skyddade uppväxt. I byarna kunde hon låta barnen leva nära syskon, släktingar och vänner i flera år. De kunde därigenom lära sig mer av sina föräldrar än några andra djurs ungar. Det viktigaste som barnen lärde sig var språket som kan beskrivas som det bästa sättet att överföra information som skapats i naturen sedan generna blev till.

Så småningom blev människans liv allt mer komplicerat. Nya miljöer, nya redskap, och nya födokällor ställde allt större krav på samarbete och kommunikation. Därmed tvingades hon att utveckla sitt språk. Tidigt hade hon lärt sig att förmedla sina känslor med kroppen och ansiktet och vi kan anta att långt innan våra förfäder klivit ner ur träden hade de också varningsrop för faror. Men nya situationer ställde nya krav. Allt fler företeelser i naturen kunde innebära mat eller fara, redskapsmaterial eller mötesplatser. Hon fick allt fler föremål att hålla reda på och hon utförde allt mer komplicerat arbete. Hon behövde därför namnge allt mer omkring sig och hon behövde tala om vad hon gjorde. Därtill behövde hon substantiv och verb. Hon behövde skilja föremål av samma sort eller djur av samma art. Det kunde hon göra med adjektiv. Hon behövde beskriva platser och ange tider vilket hon gjorde med adverb och prepositioner och en alltmer komplicerad grammatik. Under hundratusentals år utvecklades språket till ett allt effektivare kommunikationsmedel.

Med språket fick hon också en historia. När hon flyttade till nya länder bar hon med sig berättelser om det gamla landet. Föräldrar kunde för sina barn berätta vad de hört av sina föräldrar och när släktled lades till släktled blev hennes fantasivärld allt rikare. Sittande vid en lysande eld med mörkret runt sig kunde hon inbilla sig att hon såg och hörde inte bara okända farliga djur utan även längesedan döda hjältar ur det förflutna. På så sätt uppstod både myter och mytologi.

Ändå var språket konkret. Det som ledde till de första viktiga abstrakta begreppen tycks ha varit räknandat. Med de första räkneorden uppstod också nya sätt att uttrycka sig. Det anses vara mer än en tillfällighet att de personliga pronomina kallas ”första person”, ”andra person” och ”tredje person” och att ordet för ”du” i många språk liknar ordet för ”två”. Det tidigaste (förmodade) exemplet på hur människans matematiska tänkande påverkade hennes andliga utveckling skulle då vara orden ”du” och ”jag”.

4. Människor och gudar

När människorna blev fler kunde de fördela arbetet mellan sig. Några skaffade mat och andra gjorde verktyg, några skötte djur och andra skötte barn. Därmed kunde de också fördela kunskaperna så att mänsklighetens totala kunskap ökade allt mer. Med språkets hjälp blev kunskapen också mer allmän till sin karaktär, och ju allmännare hennes kunskaper blev ju lättare blev det att tänka. Därför ville hon inte bara få kunskap om sin omvärld utan hon ville också förstå den.

För att förstå naturen gjorde hon den människolik. Djur och växter kunde liksom människor vara onda eller goda. Berg och floder antogs ha vilja och själ.

Allt omkring henne hade liv och allt hade makt att påverka hennes liv. Hennes värld uppfylldes av osynliga makter som hon kallade gudar.

I vissa områden hotade hetta och torka medan regnet gav svalka och liv, i andra hotade vintern med köld medan sommarn gav värme och liv. I söder var solen en fiende och månen nattvandrarens vän, i norr lyste månen med ett kallt vitt sken över snövidderna medan solens återkomst gav värmen och livet tillbaka.[3] Sol och måne, en eller båda tillbads därför som gudar.

Även gudar måste förstås och eftersom det var människan som skapade dem ur sin egen fantasi så hade de mänskliga egenskaper. Liksom hon själv behövde även gudarna mat och dryck och de behövde sova på natten. Liksom hennes egna ledare var även gudarna fåfänga och krävde gåvor och respekt. Före en jakt gav hon gudarna gåvor för att få deras hjälp och efter jakten så delade hon sitt byte med dem.

Överallt där det fanns människor så fanns det också gudar och i varje samhälle fanns det förutom en hövding som förstod sig på värdsliga ting också en andlig ledare (schaman, medicinman eller präst) som förstod sig på gudar och andra osynliga makter.

I de riken som uppstod i de stora floddalarna blev prästerna en egen samhällsklass. Deras uppgift var att förstå och uttolka gudarnas vilja. Därför studerade de världen omkring sig och himlen över sig. De observerade sol- och månförmörkelser, kometer och planeter och de såg och anade samband mellan goda skördar, härskares öden och stjärnornas vandring över himlavalvet. Även om deras andliga frihet var begränsad så blev de den första större grupp som fick *tid och råd* att *studera och tänka.*

Härskarna i dessa riken blev de mäktigaste varelser som jorden någonsin skådat. I ena änden lät Egyptens faraoner sina slavar bygga pyramider som var 150 meter höga, i den andra lät Kinas kejsare sina slavar bygga en mur som var 250 mil lång. Däremellan fanns det härskare som kunde förvandla öken till bördig jord och bördig jord till öken. För att *erövra* makten använde dessa härskare härar av beväpnade män, men för att *behålla* den använde de gudar och präster. Med prästernas hjälp styrde de över liv och död och i gengäld fick även prästerna del av makten och rikedomen. Härskarna blev gudar och umgicks endast med likar. Endast gudar kunde ge härskarna råd, men det var prästerna som förmedlade gudarnas vilja till härskaren och härskarens vilja till folket.

5. En urgammal rit

Långt före jordbruk och boskap, långt före städer och riken, härskade riten. Medan isen ännu låg tung över norden och långt innan människan erövrat jorden uppfann hon riten. Där människor samlats har gudar tillbetts och riter uppstått. Medan språket ännu var fattigt och simpelt var det med danser, offer och riter som människor umgicks med gudar. Och riten över alla riter, den rit som styrde över levande och döda var skapelseriten.

> *Mitt på den stora arenan brann en kraftig eld. Innanför eldens ljuscirkel fanns intet att se och utanför härskade mörkret. Sedan skapades världen, först skaparen själv som uppstod ur intet och sedan hans maka. Tillsammans skapade de gudar och människor genom att kalla fram dem till ljuset. Två och två, man och kvinna, man och kvinna kallades fram och fick liv. De skapade också berg*

[3]Det är naturligtvis lika kallt i sydliga polartrakter som i nordliga, men ända tills människan för ungefär 15 tusen år sedan nådde de sydligaste delarna av Sydamerika så var kalla bebodda områden antingen nordliga eller högt belägna.

och floder, träd och buskar, örter och gräs — hans skapelser blev manliga och hennes kvinnliga. Vid skapelsen räknades varelsernas antal och namnen blev tal och talen blev namn. De udda talen blev manliga och de jämna kvinnliga.

Hos alla folk och i alla kulturer har skapelseriten funnits. Den har utvecklats och förändrats, den har anpassats till nya livsformer och nya gudar och allteftersom den förändrats har dess ursprung höljts i dunkel och ur dunklet uppstod myten.

Efter årtusenden av förändring förbleknade den till en högtid, mer eller mindre religiös, som firades vid olika tider i olika kulturer. Då två kulturer efter folkvandringar och folkförflyttningar blandats med varann så har ofta båda högtiderna överlevt. När buddhistiska, kristna och muslimska missionärer spridit nya läror har de låtit människorna behålla sina traditionella högtider men givit dem andra innehåll. På så sätt har julen blivit Jesu födelsedag och midsommaren Johannes Döparens dag.

Eftersom den förhistoriska människan är förhistorisk just för att hon inte kunde skriva är det idag svårt att bedöma riternas betydelse för henne. En av dem som hade en stor tilltro till riternas betydelse var den engelske antropologen Lord Raglan som i sitt verk *How Came Civilization* skrev följande: (i fri översättning)

> ”Vi har sett att många av de viktiga upptäckter och uppfinningar som ligger till grund för vår civilisation med stor sannolikhet gjordes inom ett område med centrum vid de stora flodernas utlopp i Persiska viken och det finns mycket som tyder på att de gjordes av begåvade präster i syfte att användas vid religiösa riter. Det är *möjligt* att djur först uppföddes för att finnas tillgängliga för offer
> och att *plogen* först användes för att symboliskt befrukta jorden;
> det är möjligt att det första *hjulet* förde solen i dess bana
> och att de första *metallarbetena* avbildade solen i guld;
> det är möjligt att den första *pilbågen* gav ett rituellt bevis för gudarnas makt att döda på avstånd;
> det är möjligt att *balsamering* användes för hålla den döde kungen rituellt levande och att *draken* sände hans själ till himmelen.
> För var och en av dessa uppfinningar finns det något som tyder på att det kan ha gått till på just detta sätt, och tillsammans stärker detta hela denna teori, d.v.s. teorin att all civilisation har uppstått ur riter. Det behövs naturligtvis mycket fler bevis för att fastslå att så verkligen är fallet, men för andra teorier finns det inga bevis alls.”

En som också har en stor tilltro till riternas betydelse är antropologen och matematikhistorikern A. Seidenberg, som framfört teorin att själva räknandet har sitt ursprung i skapelseriten och att det mesta av den talmystik som förekommer i världen kan härledas till de varelser som representerades av givna tal. Även om teorin är långt ifrån invändningsfri så finns det flera skäl som talar för den. Det främsta skälet är att den förhistoriska människan faktiskt inte hade något behov av att räkna, något som bevisas av att de mest primitiva kulturerna än i dag saknar räkneord för mer än de allra första talen. Teorin ger också en naturlig förklaring till varför de äldsta formerna av räknande är *binära*[4] och varför i många kulturer de udda talen faktiskt var manliga och de jämna kvinnliga. En konsekvens av teorin är därför att vi inte började med att räkna på fingrarna, utan att fingrarna senare kom in som ett hjälpmedel för att hålla ordning på större tal, vilket så småningom ledde till att de flesta språk idag har decimala talsystem.

[4]De först räkneorden kan tolkas som *Ett, Två, Två-ett, Två-två, Två-två-ett* o.s.v.

Enligt Seidenbergs teori var skapelseriten av betydelse inte bara för uppkomsten av *räknandet* och därmed *aritmetiken* utan även för *geometrin.* I riten var arenan en cirkel och de skapade varelserna rörde sig i cirklar runt elden och skaparen, rörelsen var alltid medsols och de första gudar som skapades förknippades med planeter och stjärnor som rörde sig på himlavalvet. Genom skapelseriten blev cirkeln helig, och rörelsen medsols blev lyckobringande — samtidigt vandrade allt som skulle offras motsols runt elden. Denna rörelse blev därför farlig och olycksbådande och kom att förknippas med undergång och död.

6. Några förutsättningar för denna bok

Seidenbergs teorier, de må vara mer eller mindre korrekta, bygger på vissa enkla antaganden av vilka det viktigaste är *diffusionsteorin.*[5] Denna säger i sin enklaste form att de flesta *innovationer* (d.v.s. nya idéer, nya uppfinningar och liknande) som regel bara har gjorts en gång i mänsklighetens historia. Därefter har de *diffunderat*, d.v.s. helt enkelt *spritt sig* till andra kulturer och andra folk. En konsekvens av teorin är att om samma innovation kan hittas i flera kulturer så skall man inte omedelbart dra slutsatsen att båda kulturerna oberoende av varann kommit på samma idé, utan istället bör man i första hand söka antingen en förbindelse mellan kulturerna eller ett gemensamt äldre ursprung för idén.

I detta sammanhang kan det vara värt att nämna den oerhört allmänna regeln som säger att företeelser som är alltför olika varann har svårt att påverka varann och att ju större likheterna är ju större är möjligheterna till ömsesidig påverkan. Människor emellan innebär detta t.ex. att vi har lättare att lära oss något av den som tänker likadant som vi. Denna regel om likhet innebär också att om det finns en naturlig skala för att mäta en företeelse så blir växelverkan mellan "två individer" störst när de ligger nära varann på skalan. För att återgå till inlärningssituationen så är det lättare för oss att lära oss kinesiska från en nybörjarbok avsedd för svenskar än från en kinesisk grammatik avsedd för gymnasiet i Kina. Kulturer emellan innebär detta att de kulturer som befann sig på ungefär samma "utvecklingsnivå" hade lätt för att lära av varann, medan kulturer på vitt skilda nivåer kunde leva sida vid sida i århundraden eller årtusenden utan att det skedde någon större ömsesidig påverkan.

Seidenbergs andra antagande är att *myter* ofta, för att inte säga vanligen, har sitt ursprung i *riter.* Detta antagande är inte av någon större betydelse för denna bok, men det är av stor betydelse för Seidenberg, eftersom han genom att studera myter i (främst s.k. primitiva) kulturer söker belägg för att företeelser som han är intresserad av har ett ursprung i (äldre, ofta försvunna) riter.

Ett tredje antagande utgår ifrån ett påtagligt faktum, nämligen att många uppfinningar som senare fått stor betydelse (exempelvis hjulet) har en *användbarhetströskel* d.v.s. att de kräver en relativt lång utvecklingsperiod för att bli *praktiskt* användbara. Detta innebär att det har behövts en period där de fått *utvecklas i fred*, utan krav på att vara nyttiga. Den förklaring som Seidenberg (och bl.a. Lord Raglan) givit till att de fått denna möjlighet att utvecklas är att de haft en symbolisk betydelse i en religiös rit.

Det finns också ett fjärde antagande som inte är lika tydligt uttalat, nämligen att många av de viktigaste innovationerna inte fyllde något praktiskt behov — men att de i stället *skapade* ett behov. (I våra dagar är detta uppenbart — innan telefonen fanns var det helt enkelt omöjligt att föra ett samtal mellan Stockholm

[5]De antaganden som ligger till grund för Seidenbergs teorier har inte formulerats av honom utan är vanliga hypoteser inom s.k. antropologiska vetenskaper, d.v.s.vetenskaper som studerar (främst primitiva) mänskliga kulturer.

och Paris och ingen människa skulle ha känt ett *behov* av att göra det, däremot kunde de naturligtvis ha *beklagat* att det var omöjligt. Seidenberg hävdar att det var likadant med exempelvis pilbågen eller hjulet.)

För min egen del har jag, som sekulariserad svensk, bara delvis och högst motvilligt accepterat Seidenbergs starka tro på riternas (speciellt skapelseritens) stora betydelse. Jag har dock inga allvarliga invändningar mot Seidenbergs antaganden även om jag delvis vill nyansera dem. Dessutom har jag ytterligare några antaganden av en likartad natur. Dessa utgör sedan något av ett återkommande för att inte säga genomgående tema i boken.

Mitt grundantagande, som delvis ersätter Seidenbergs tro på riternas betydelse, är att uppfinningar som kräver en viss utvecklingstid för att bli allmänt användbara, har gjorts under speciella omständigheter, antingen sådana där tröskeln av en eller annan anledning varit lägre, eller i situationer som saknade praktisk betydelse. Sådan situationer har delvis varit religiösa, men de har också ofta varit *rent vetenskapliga*.

Ett annat antagande som är något svårare att formulera explicit är att innovationer som kräver verkligt nya idéer som regel förutsätter att de matematiska begreppen nått en viss kritisk nivå, så att perioder av *teknisk* kreativitet som regel förutsätter perioder av matematisk aktivitet. Speciellt gäller detta utvecklingen av talbegreppet (från naturliga tal, via rationella, negativa, till reella och komplexa tal), men även de geometriska begreppen har varit av betydelse, påtagligast genom det nära sambandet mellan *cirkeln* och *rotationen*.

Förutom framväxten av de matematiska grundbegreppen, som jag uppfattar som ett mått på en kulturs *intellektuella* mognad har hantverksskicklighet och materialkunskap utgjort en nödvändig förutsättning för teknisk (och vetenskaplig) utveckling. Ett enkelt exempel på detta är att det var omöjligt att tillverka linser innan det fanns genomskinligt glas. Jag betraktar detta som den *materiella* förutsättningen och där så varit möjligt har jag försökt att belysa denna för skilda epoker.

Mitt sista antagande, som egentligen är så självklart att det inte borde behöva uttalas, är att utveckling inom en mänsklig aktivitet förutsätter att tillräckligt många har *tid och råd* att ägna sig åt den. Detta innebär inte bara så självklara saker som att matematiken inte kan utvecklas när det saknas matematiker, vetenskapen står stilla när det saknas vetenskapsmän, inga tavlor målas när det saknas konstnärer o.s.v., utan också att skickligheten inom ett hantverk utvecklas när hantverket blir ett yrke. Detta innebär exempelvis att så länge som varje hushåll bakade sitt eget bröd så kunde de använda enkla handkvarnar men när det uppstod bagerier så förbättrades så småningom kvarnarna, och att så länge som varje familj byggde sitt eget hus så byggde de exakt som grannen, men när (och där) det fanns professionella byggmästare så utvecklades byggnadstekniken.

Det jag i denna bok försöker att förmedla är en bild av den mänskliga kunskapen och dess utveckling, varvid jag i första hand sökt att belysa de matematiska idéernas betydelse för denna. Som jag ser det har vi tre olika typer av kunskaper som jag vill kalla *händernas, sinnenas* och *hjärnans* kunskaper, varvid händernas kunskap är allt det som vi kan utföra och som ger oss vårt bröd, sinnenas är allt det som vi lärt oss genom observation och hjärnans är den som vi erhåller genom vårt tänkande. Trots att vi inte utvecklats biologiskt under de senaste 10000 åren och därför inte är intelligentare än våra förfäder så har vårt tänkande under dessa år utvecklats på ett sätt som vi lättast inser genom att se på dess materiella konsekvenser. Det som gjort detta tänkande möjligt är att vi skapat abstrakta begrepp som för våra hjärnor är lika påtagliga som föremålen omkring oss. Vi kan därför tänka lika mycket på och om abstrakta idéer som på konkreta föremål. Det som alltid angivit gränsen för det mänskliga tänkandet är därför karaktären hos de allra mest abstrakta begreppen, d.v.s.de matematiska.

Jag ser därför mänskligheten och hennes samlade kunskap som en koloss på två ben, det högra benet vilar på en stor kraftig fot av hantverkskunskap och teknisk skicklighet, medan det vänstra är ett bräckligt träben av matematiska begrepp. För att kolossen ska kunna röra sig framåt måste båda fötterna röra sig, om inte så vandrar hela kolossen runt i cirklar.

KAP.1. Om historia och matematik

1. Historieskrivning

Vår historia under de senaste tiotusen åren kan berättas och beskrivas på många olika sätt. Eftersom den fullständiga historien inte kan skrivas och aldrig skulle bli läst, så ger varje historieskrivning bara en liten liten del av allt det som människor gjort under denna tid. Alla historieskrivningar handlar om mänskliga aktiviteter, ofta handlar de om människor, oftast män, som anses ha uträttat stora saker i livet.

Den historieskrivning som ofta uppfattas som historien själv är den politiska historien eller, som den också kan kallas, maktens historia. Denna ger oss vår historiska identitet. Den talar om för oss vilka vi är som lever i detta land och varför vi talar det språk vi gör. Den talar också om för oss vilka krig våra förfäder utkämpat och vilka folk och nationer som vi av historiska skäl ska älska eller hata. Även om den också kan förklara något om varför vi styrs som vi gör, så säger den mycket lite om varför vi lever som vi gör. För att få veta något om detta så får vi istället vända oss till den ekonomiska historien och till teknikhistorien.

I den svenska riksdagen fanns det förr fyra stånd, adel, präster, borgare och bönder. Adeln och prästerna betalade vid denna tid ingen skatt och kallades därför de *frälse* stånden varvid adeln utgjorde det världsliga frälset och prästerna det andliga. Den politiska historien kan i mångt och mycket också beskrivas som det *världsliga frälsets historia.* På motsvarande sätt kan den ekonomiska historien delvis ses som borgarståndets historia. Det finns också en historieskrivning som kan uppfattas som det andliga frälsets historia under tiotusen år, och som handlar om mycket mer än bara kristna präster. Denna brukar kallas *Idéhistorien* och beskriver hur våra föreställningar om Gud, människa och natur utvecklats och förändrats under denna tid.

I rättvisans namn borde det också finnas en historieskrivning som kunde kallas bondeståndets historia eller kanske ändå bättre *det arbetande folkets historia.* Någon sådan historia finns dock inte och kommer heller knappast att skrivas. Det främsta skälet till detta är inte att denna skulle vara ointressant eller tråkig, utan helt enkelt att den är svår för att inte säga omöjlig att skriva.

All vår kunskap om våra förfäders liv och verksamhet härrör ytterst ur vad som brukar kallas historiska källor eller kvarlevor. Dessa historiska källor kan visserligen vara av två slag, skrivna eller oskrivna, men det är i allt väsentligt de skrivna källorna som utgör grunden till vårt vetande om det förflutna. Detta innebär att grunden för *all historieskrivning* är det arv som den *skrivande klassen* lämnat efter sig. Detta kan också uttryckas så att vi *ser det förflutna genom den skrivande klassens ögon.* Eftersom denna samhällsklass som regel riktat sina ögon åt annat håll så finns det tyvärr alldeles för lite skrivet om det arbetande folket.

Förutom den politiska och ekonomiska historien som kan sägas beröra alla, så finns det också mer speciella mänskliga aktiviteter som fått sin egen historia. Välkända exempel är litteraturen, konsten och filosofin, medan t.ex. metallurgin, naturvetenskapen och matematiken är mindre kända, åtminstone som historiska vetenskaper.

Förutom att varje historisk berättelse alltid är begränsad i avseende på vilka händelser och aktiviteter som uppfattas som intressanta, så är nästan alla också begränsade i tid och rum. De flesta som vi får läsa ser världen ur ett europeiskt eller rentav ett svenskt perspektiv, vilket brukar innebära att de främst berör händelser som påverkat oss.

Det du nu håller i dina händer är en historisk bok. Det är en bok som handlar om människan och matematiken under de senaste tiotusen åren, men det är inte enbart en bok om matematikens historia. Istället är det en bok som berör idéhistoria, vetenskapshistoria och teknikhistoria eller kanske helt enkelt kunskapshistoria. Min avsikt är inte att beskriva hur matematiken i sig har utvecklats, utan att visa hur utvecklandet av de centrala matematiska begreppen har påverkat tänkandet, tekniken och vetenskapen.

De tiotusen år som boken handlar om består i själva verket av två perioder, nämligen den förhistoriska eller arkeologiska som kan vara mer eller mindre lång i olika delar av världen och som i vissa delar sträcker sig ända fram till vår egen tid, och den historiska som började för ungefär femtusen år sedan med att sumererna i Mesopotamien uppfann skriftspråket. Den historiska tiden är alltså den tid om vilken det finns ett *skrivet* historiskt material.

Det finns också för de flesta kulturer en period mellan den förhistoriska då inget finns skrivet och den historiska då kulturen skriver om sig själv, nämligen den tid då den påverkar och beskrivs av andra folk, som redan nått den historiska perioden. Denna period kallas ibland den proto-historiska. Om vi som man ofta gör med historia menar politisk historia, så kan den historiska tiden i ett land karakteriseras av att det är den tid då landets härskare omger sig med skrivare. Alternativt är övergången från förhistorisk till historisk tid det ögonblick då det talade ordet ersätts med det skrivna och därmed förlorar sin betydelse. En av de levnadsregler som står i det nordiska *Havamal*, det som ges av talesättet *"en man står vid sitt ord"* är ett typiskt uttryck för en förhistorisk tid.

2. Människans tidevarv

Om vi vill beskriva det som hänt på jorden under de senaste tiotusen åren ur ett Gaia-perspektiv[6], så är det mest påtagliga att en enda art, nämligen människan, ökat sitt antal från mindre än en *miljon* individer till närmare fem *miljarder*, vilket innebär att det idag finns ungefär tiotusen gånger så många människor som för tiotusen år sedan. För att livnära denna allt större befolkning, så har människan främst använt sig av vad vi med ett modernt ord kunde kalla *bioteknik*, eftersom den innebär att hon tagit andra levande varelser i sin tjänst. Denna bioteknik har utvecklats från det att hon genom att tämja hunden fick en god jaktkamrat, via boskapsskötsel och jordbruk, till att hon idag genom att direkt påverka arvsanlagen kan skapa nya arter av liv.

En viktig förutsättning för denna bioteknik har varit att hon under samma tid också lärt sig att ta tillvara de möjligheter som jorden själv, d.v.s. den *icke levande* delen av naturen givit. Efter att under någon miljon år ha använt enkla redskap av sten, trä och naturliga fibrer, har hon under dessa sista tiotusen år lärt sig att tillverka alltmer komplicerade redskap av egna material som kan vara hårdare än sten och formbarare än trä. Mycket grovt kan vi säga att människan genom att lära sig att utnyttja den livlösa naturen fått kontroll över den levande.

Att denna utveckling knappast kunnat glädja gaia är något som vi kanske tar med jämnmod, men att den även för människans vidkommande är på både gott och ont, är ett faktum som blev tydligt först når vår teknik och vårt antal blev ett hot mot vår egen fortlevnad. Dessutom kan vi ju se i vår omvärld att även om det aldrig tidigare (samtidigt) levt så många välmående människor har det heller aldrig funnits så många som far illa.

[6] Gaia är det grekiska ordet för planeten Jorden, men används numera ofta som ett symboliskt namn för allt det liv som levs på planeten och som tillsammans utgör det vi också kunde kalla för den *levande* naturen.

Oavsett om vi därför vill se utvecklingen under de senaste tiotusen åren som något gott eller ej, så kan vi idag inte göra mer än att konstatera att den har ägt rum, och om möjligt påverka den fortsatta utvecklingen därhän att inte bara vi och våra barn, utan även våra barnbarn och deras barnbarn och barnbarns barnbarn och helst ytterligare ett antal generationer, får leva i en värld som vi skulle vilja kalla *mänsklig*.

Den viktigaste förutsättningen för den utveckling som ägt rum har varit att människans *kunskaper* om sig själv och sin omgivning har vuxit och förändrats. Människans kunskaper har alltid varit av tre olika (men naturligtvis ömsesidigt beroende) slag. Den omedelbart nyttiga kunskapen har alltid varit det jag vill kalla *handens kunskap* och som innefattar allt det som vi faktiskt kan *göra*, antingen vi nu använder våra bara händer, en synål, en hammare, förarspaken i ett jetflygplan eller en dataterminal för att göra det. Nästa slag av kunskap är den som jag vill kalla *ögats*, eller något allmännare sinnenas, kunskap. Denna består av allt det som vi lärt oss genom att observera vår omgivning, och utgör (delvis tillsammans med handens kunskap) *erfarenheten*. Den tredje typen vill jag kalla för *hjärnans* kunskap. Det är den kunskap som till stor del skapats i våra egna hjärnor, det är abstrakta begrepp, idéer och teorier och det är också den kunskap som, ofta på goda grunder, uppfattats som onyttig.

Om vi bortser ifrån att våra sammanlagda kunskaper ökat helt enkelt för att vi blivit fler, och att vi tack vare skriftspråket kunnat lära oss mer av tidigare generationer och varann, så är det inte mängden av individernas kunskap som ändrats, utan det är typen av kunskap. Medan våra förfäder för sin överlevnad främst var beroende av ett gott handlag med enkla verktyg och detaljerade observationer av sin närmaste omgivning, så är det idag främst kunskaperna av det tredje slaget som styr världens utveckling. Det bör också påpekas att även om det inte skett någon *biologisk förändring* av människan under de senaste tiotusen åren så att vi inte på något sätt är intelligentare än våra förfäder, så har vårt tänkande undergått en häpnadsväckande utveckling under denna tid. Tack vare vårt tänkande har vi kunnat förstärka våra sinnen så att vi nu i mikroskop kan se de bakterier som spred de sjukdomar som plågade våra förfäder och vi har kunnat stärka våra händer så att ett fartyg idag kan flytta ett större lass än alla våra förfäder för tiotusen år sedan kunnat lyfta tillsammans. Vi kan t.o.m. göra observationer av fenomen som inte ens är tillgängliga för våra sinnen, såsom när vi med en TV-apparat omvandlar elektriska svängningar i vår atmosfär till färgbilder på en skärm.

Det som gjort detta tänkande möjligt är alla de abstrakta begrepp som för våra hjärnor är lika påtagliga som tingen omkring oss. Många av dessa begrepp är idag så vanliga och alldagliga att vi inte längre ens uppfattar dem som abstrakta. Ändå har det alltid varit karaktären hos de mest abstrakta begreppen, d.v.s. de matematiska som angivit gränserna för och styrt utvecklingen av det mänskliga tänkandet.

Det är oräkneliga individer, de flesta okända eller bortglömda, yrkesgrupper, folk och kulturer som bidragit till skapandet av det *människans tidevarv*, som vi nu alla lever i. Jag vill i denna bok ge en allmän bild av tänkandets och kunskapens utveckling, samtidigt som jag vill belysa den roll några viktiga matematiska begrepp spelat för den.

3. Utveckling och förändring.

En i vår västerländska kultur omhuldad myt är att människan i alla tider strävat efter att få det bättre. Trots att detta påstående förefaller närmast banalt och fullkomligt självklart så är det ingenting annat än just en myt. Det som möjligen kan vara sant är att de flesta människor idag i denna kultur strävar efter att få del av ett växande materiellt välstånd, och att många hoppas och tror att deras barn en dag ska få ett ännu bättre liv än vad de själva har. Det är däremot totalt felaktigt att tro att detta är något som gällt för alla människor i alla tider.

Istället är det snarare så att denna myt är oerhört avslöjande för vår egen tid och våra egna föreställningar. Det mest karakteristiska för myten är dess materialistiska syn på lyckan, men eftersom vi lever i en materialistisk tid så är detta något som vi inte ens ser. Vi lever i en tid som kännetecknas av snabba förändringar av våra materiella villkor, eller med andra ord, vi tycks få det bättre för varje år som går. För varje år får vi fler och bättre bilar, fler och bättre videoapparater och fler och bättre datorer. Dessa snabba förändringar är något som präglat hela vårt liv och som vi därför uppfattar som något fullkomligt normalt och naturligt. Ändå är märkbara materiella förändringar under en människas livstid ett fullkomligt nytt tillstånd i vår värld, men det är ett tillstånd som varat i hundra, kanske tvåhundra år, vilket gör att vi tror att det alltid har varit så. Före denna tid av förändring var det ytterst få människor som någonsin lekte med tanken *att få det bättre*.

Det är därför inte människans ständiga strävan efter att få det bättre som varit drivkraften för den utveckling som ägt rum under de senaste årtusendena. Inte heller har utvecklingen skett efter enkla regler eller under allmän samstämmighet. Istället har de flesta större förändringar som ägt rum skett under stort motstånd från såväl de styrande som från den närmast berörda delen av det arbetande folket. De styrande har som regel motsatt sig förändringar av ren självbevarelsedrift, eftersom de mer eller mindre medvetet insett att alla verkliga förändringar skulle ändra maktbalansen i samhället. Även det arbetande folket, som inte borde ha någon makt att förlora var rädda för förändringar främst därför att dessa hotade att ta ifrån dem den enda makt de faktiskt hade, nämligen förmågan att utföra sitt arbete.

Vad som verkligen varit drivkrafterna för utvecklingen är något som det råder mycket delade meningar om. Historiker av skilda slag betonar helst betydelsen av sitt specialområde, antingen detta är den politiska, den ekonomiska eller någon annan del av historien. Därutöver finns alltid den oerhört kontroversiella frågan om huruvida de viktiga förändringarna kommit uppifrån eller nedifrån. Mycket förenklat kan man säga att de flesta av oss har en benägenhet att överskatta betydelsen av våra egna ”andliga förfäder”, vilket oftast innebär de som i det förflutna haft en ställning eller uppgift som påminner om vår egen. Förmodligen hyser vi den fåfänga förhoppningen att ett litet återsken av den glans som vi sprider över våra föregångare ska falla på oss själva.

I denna bok kommer jag att ge min syn på hur utvecklingen gått till, vad som hänt och varför det hänt. Eftersom jag är matematiker kommer jag främst att betona och förmodligen överbetona matematikens betydelse, men trots detta hoppas jag att boken kan vara av intresse även för den som inte är intresserad av matematik och kanske t.o.m. för en och annan som alltid ”hatat matematik”.

Innan jag på allvar kommer in på bokens centrala teman vill jag tala om hur jag ser på den utvecklingsprocess som boken ska handla om. Det jag vill förklara är hur och varför de tre formerna av kunskap har utvecklats och vuxit under de senaste årtusendena. Som jag ser det så är den allra viktigaste förutsättningen så banal att den vanligen förbigås. Den viktigaste förutsättningen för all utveckling inom en mänsklig verksamhet är nämligen att

> tillräckligt många ges tillräcklig tid att ägna sig åt den.

Detta innebär bl.a. att hantverkskunnandet förbättrades när hantverkena blev yrken och att matematiken utvecklades snabbare under perioder av livlig matematisk aktivitet. Som jag ser det så har alltså den differentiering och specialisering av näringslivet som sammanhängt med utvecklingen snarare varit en orsak *till* än en följd *av* den.

Det bör dock påpekas att det som regel inte räckt med att det funnits människor som ägnat sig åt en viss verksamhet, utan det har också krävts att de som gjort det haft en *tillräcklig självständighet*, vilket innebär att de inte varit bundna av auktoriteter, varken levande eller sedan länge döda sådana. För att förstå varför utvecklingen av vissa aktiviteter varit särskilt snabb inom vissa kulturer och under vissa perioder gäller det därför att förstå dels

varför så många kunnat ägna sig åt dem och dels
varför de varit så självständiga.

4. Varför matematik?

Jag ska i detta avsnitt ta upp några faktorer som givit matematiken en större betydelse för idé-, tanke- och kunskapsutvecklingen än vad de flesta av oss är medvetna om. Den viktigaste av dessa faktorer är den *absoluta visshet* som matematiken givit sina utövare.

Som jag nyss nämnde har de flesta större förändringar, politiska, tekniska eller andra, skett under motstånd från de styrande. Detta motstånd var närmast självklart eftersom de instinktivt fruktade alla förändringar som kunde hota deras egen makt. Ett i detta sammanhang viktigt faktum är den världsliga makten i de flesta samhällen varit naturligt lierad med någon religion så att de två tillsammans med minsta möjliga fysiska våld kunnat hålla de styrda i (*herrans*) tukt och förmaning. Ett studium av historien visar också att alla verkligt långlivade kulturer och maktstrukturer varit synnerligen motståndskraftiga mot förändringar och därmed varit extremt statiska. Vanligen har de också varit kulturer som lyckats väl med att förena världslig och religiös makt. För att uttrycka saken vanvördigt så skulle man kunna säga att de gudar som försvarats av starka arméer som regel klarat sig bäst här på jorden.

Detta ömsesidiga beroende mellan världslig och andlig makt har varit av stor betydelse för matematiken, eftersom denna alltid varit beroende av åtminstone någon form av ekonomiskt stöd. Från begynnelsen och ända fram till de senaste århundradena fick matematiken som regel detta stöd genom att den på ett eller annat sätt var knuten till religionen (och därmed indirekt också till den världsliga makten).

Det är naturligtvis inte bara matematiken som varit beroende av de mäktiga i samhället utan detsamma har gällt för de flesta vetenskapliga och även många konstnärliga aktiviteter. Dock har matematiken av åtminstone två anledningar haft en särställning som gjort den mer självständig, men därigenom också mer beroende än de flesta andra verksamheter. Den främsta anledningen till denna självständighet har utgjorts av *den absoluta vissheten*. Matematiken har i alla tider varit en symbol för den absoluta sanningen. Den har inom sitt begränsade område haft en auktoritet som ingen världslig makt kunnat rubba. Vi vet att

$$2 + 2 = 4$$

och inte ens kungen själv kan ändra på detta.[7] I själva verket hade matematiken en sådan auktoritet att den inte bara motstod den världsliga makten utan också kunde

[7]Visserligen är våra beteckningar för tal och aritmetiska operationer enbart konventioner som vi kommit överens om så att en mäktig kung kan naturligtvis bestämma att i hans land ska talet fyra skrivas med tecknet "5", så att hans undersåtar måste skriva att $2 + 2 = 5$, men detta ändrar inte på det faktum att "två och två är fyra"!

utgöra ett potentiellt hot mot den religiösa. Nu var detta inte något större problem under antiken eftersom matematiken dels hade uppstått ur religionen, dels själv uppfattades som en del av den gudomliga ordningen. I det kristna Europa, där tron var viktigare än vetandet, hade matematiken länge svårt att göra sig gällande och det var inte förrän skolastikerna med Tomas av Aquino i spetsen lyckades förena Aristoteles filosofi med kristendomen, som denna blev tillräckligt rationell för att tillåta matematik. Så småningom fick de europeiska vetenskapsmännen samma tillit till matematiken som deras antika föregångare hade haft och istället för att känna sig som kättare och hedningar, så valde de att tillbe en Gud som visserligen var lika allgod som förut, men som för att kunna vara allsmäktig måste vara matematiker. När därför Kopernikus och Kepler studerade de matematiska egenskaperna hos solsystemet, så gjorde de det för att studera Guds skapelse och hans tankar och planer, och de resultat de uppnådde presenterades som vittnesbörd om Guds vishet (och genialitet som matematiker).

Den andra anledningen till matematikens speciella ställning är att matematisk forskning aldrig varit lönsam. När världens mäktiga understödde konstnärer, arkitekter och ingenjörer så förväntade de sig att dessa skulle skapa verk till sina mecenaters ära och när de uppmuntrade och finansierade upptäckare och uppfinnare så räknade de med ekonomisk avkastning på investerat kapital. Om de understödde matematiken hade de intet att vinna. Ingen mecenat har kunnat få varken ekonomisk eller annan vinning genom att stödja en matematiker. Vad en mecenat kunnat hoppas på har varit ära och möjligen en (i bästa fall) duglig person som också kunde användas till annat.

Förutom den absoluta vissheten har matematiken också karakteriserats av sin abstraktion. I varje tid har det matematiska tänkandet varit det just då mest abstrakta som förekommit (något som inte hindrar att dagens teoretiska fysik är betydligt mer abstrakt än 1800-talets matematik). Samtidigt har detta abstrakta tänkande i matematiken fått en konkretion som gjort det möjligt att förstå. Den matematiska förståelsen har sedan lett till väldefinierade matematiska begrepp som kunnat användas som underlag och modeller för annat tänkande. Det kanske vackraste exemplet på detta är gruppbegreppet som skapades av den unge fransmannen Évariste Galois som ett led i hans studier av polynomekvationer. Ett halvt århundrade senare började man inse att detta begrepp var det centrala för förståelsen av *symmetri*, som matematisk, fysikalisk och konstnärlig företeelse.

5. Tal

Jag kommer i denna bok att försöka att följa framväxten av tre matematiska begrepp eller strukturer. Det första av dessa är *talbegreppet*, det andra är *cirkeln*, och det tredje är något som innefattar dem båda, nämligen *symmetribegreppet*.

Dessa tre begrepp har det gemensamt att de i sin mest primitiva form varit kända för mänskligheten i alla tider, och de har också det gemensamt att de varit av stor praktisk betydelse. Den viktigaste skillnaden är att ett av dem, nämligen symmetrin är både abstraktare och allmännare än de andra två. Detta har inneburit att medan talen och cirkeln uppfattats som matematiska begrepp i mer än fem tusen år, så dröjde det till det förra århundradet innan de strukturer, som behövdes för att tolka symmetrin matematiskt, hade upptäckts.

Innan jag går in på den historiska framväxten av begreppen så vill jag börja med att beskriva hur de används i dagens matematik, varvid jag börjar med talbegreppet.

Det kanske mest anmärkningsvärda med detta begrepp är hur många olika sorters tal som matematikerna använder och hur få av dessa som är kända av allmänheten. De viktigaste talen är de som vi först får lära oss nämligen de *naturliga*. Dessa beskrivs ofta som de tal vi använder för att besvara frågan *hur många?*, vilket innebär att de flesta matematiker numera anser att t.ex. det tal som besvarar frågan *Hur många isbjörnar finns det i Antarktis?* är naturligt. Matematikerna anser med andra ord att 0 är ett naturligt tal, något som är praktiskt men som samtidigt är ett brott mot den historiska traditionen. Det bör dock påpekas att användningen av datorer under senare år vant allt fler vid att uppfatta talet 0 som naturligt.

Förutom att vi använder de naturliga talen för att ange antal, så kan vi också använda dem för att addera och multiplicera. Dessutom är subtraktion och division ibland möjlig. För att göra alla subtraktioner möjliga kan man införa negativa tal. De naturliga och de negativa talen kallas tillsammans för de *hela* talen.

Nästa steg brukar vara att möjliggöra fler divisioner vilket sker med hjälp av bråkräkning. Ett *bråk* är en kvot mellan två hela tal, en täljare och en nämnare (som inte får vara 0). Historiskt sett tog det många århundraden för matematikerna att lära sig att räkna med bråk eller, för att använda det moderna språkbruket, de *rationella talen*. De inneboende svårigheter, som kan göra bråkräkning svår även för dagens skolelever, är dels att ett givet tal kan skrivas på olika sätt (exempelvis är ju $3/4 = 45/60 = 75/100$) och dels att addition och subtraktion av bråk är relativt komplicerat att utföra. Att det är betydligt lättare att multiplicera (och dividera) bråk märks både i skolan och i matematikhistorien.

De rationella talen är fullt tillräckliga för alla praktiska användningar av matematik, något som i våra dagar blivit uppenbart genom den ökade användningen av datorer (och miniräknare).[8] Däremot är de inte tillräckliga för matematikens egna behov, något som redan grekerna insåg, och de räcker heller inte till för den teoretiska fysikens behov. Problemet med de rationella talen är att de *är för få*, så att det t.ex. inte finns något rationellt tal q sådant att $q^2 = 2$. Även om min miniräknare har en *kvadratrot* så att jag faktiskt kan slå in något som ger sig ut för att vara t.ex. $\sqrt{2}$ (vilket på min räknare ger svaret $1,414213562$) så är detta tal bara ett närmevärde. Tar jag kvadraten på detta tal så får jag inte tillbaka talet 2 utan istället $1,999999999$ och detsamma gäller i princip för alla miniräknare.

I två tusen år stod matematikerna hjälplösa inför detta problem och inte förrän man hade vant sig vid att räkna både med decimalbråk och med bokstäver kunde matematikerna lära sig att räkna med de tal som låg mellan de rationella. Detta innebär att de linjer som hade använts i geometrin sedan årtusenden plötsligt kunde fyllas med tal vilket gav upphov till såväl tallinjen som koordinatsystemet (även om det historiskt sett var koordinatsystemet som kom först). De tal som fyllde ut tallinjen kallas numera för reella tal och är nödvändiga för att beskriva begreppet *kontinuitet* matematiskt. Tillsammans med de reella talen uppstod logaritmräkningen som förvandlade arbetsamma multiplikationer till betydligt lättare additioner och den analytiska geometrin som gjorde det möjligt att lösa geometriska problem med räkning. Det dröjde sedan inte länge förrän den moderna matematiken föddes genom Newtons och Leibnitz upptäckt av differentialkalkylen.

Redan innan matematikerna lärt sig att räkna med reella tal hade de lärt sig att lösa ekvationer. Att lösa andragradsekvationer var något som redan babylonierna (och förmodligen sumererna före dem) kunde göra för mer än fyra tusen år sedan, medan däremot tredje- och fjärdegradsekvationerna motstod alla antikens

[8] Även om datorernas tal kallas *real* vilket borde betyda att de inte nödvändigtvis är vanliga bråk, så är detta bara något som datorfabrikanter och programmerare hittat på. Sanningen är nämligen den att de enda tal som datorer kan räkna med är vanliga bråk.

och medeltidens lösningsförsök. Inte förrän de italienska matematikerna under renässansen vågade sig på det djärva greppet att räkna med kvadratroten ur negativa tal så kunde dessa ekvationer lösas. Detta innebär att redan på 1500-talet så hade man upptäckt de *imaginära talen.* Det tog dock tre hundra år innan matematikerna riktigt lärde sig att förstå och handskas med dem. Det stora problemet var att man saknade en geometrisk modell för dem, och även om många 1700-talsmatematiker uppenbarligen tänkte geometriskt dröjde det ända till seklets slut, innan någon vågade föreslå ett plan med både reella och imaginära tal. När det skedde så var det dels den danske lantmätaren Caspar Wessel, som knappast anade sin egen djärvhet, och dels den unge och respektlöse Gauss. Idag används sällan uttrycket imaginärt tal utan istället talar matematikerna om *komplexa tal.*[9] Trots att dessa tycks sakna all verklig innebörd så är de idag nödvändiga inte bara för den teoretiska fysiken utan t.o.m. för många praktiskt arbetande civilingenjörer.

Så här långt har vi hållit oss till de talsystem som det borde anses höra till en modern allmänbildning att känna till. Utöver dessa använder dagens matematiker många andra typer av tal. Det som i dagens matematik kännetecknar talen är inte att de kan användas för att räkna konkreta föremål, utan att de ingår i system där man kan addera, subtrahera, multiplicera och (ofta) dividera.[10]

6. Cirkeln

Som form och begrepp är cirkeln äldre än all civilisation och eftersom den mer eller mindre medvetet utnyttjas av såväl växter som djur, så är den också långt äldre än människan själv. Så snart människan fått någorlunda plana ytor att rita på, och långt innan hon använde siffror och bokstäver, så ritade hon cirklar. Satser om cirklar var bland de först bevisade geometriska satserna och problemet att geometriskt konstruera en kvadrat med samma yta som en cirkel var ett av den antika matematikens klassiska problem. I Euklides Elementa ägnas tredje och fjärde boken åt cirkeln och där bevisas alla de välkända satserna om tangenter, kordor, mittpunkts– och periferivinklar. Cirkeln var också den första figur som beskrevs genom en ekvation i den analytiska geometrin. I alla tider har cirkeln fascinerat människan och studerats av matematikerna, och den har varit det bäst kända av alla geometriska begrepp. Tillsammans med cirkeln har också dess fysikaliska tvillingsyster, rotationen, använts och studerats.

Cirkeln spelade också en viktig roll för framväxten av den moderna matematiken under 1700-talet. Även om alla dess geometriska egenskaper var kända sedan länge så skapade koordinatsystemet och ännu mer det komplexa talplanet nya matematiska formler för att beskriva cirklar. Speciellt innebar Eulers berömda formel $e^{it} = \cos t + i \sin t$ att cirkeln fick en framställning som direkt visade sambandet med rotationen. Därigenom fick matematiker och fysiker helt nya möjligheter att räkna på problem som rörde rotation och man upptäckte så småningom att alla problem som gällde vågrörelser, svängningar och överhuvudtaget periodiska förlopp bäst beskrevs med hjälp av cirklar och cirkelrörelser.

---

[9] Däremot talar man om real- och imaginärdelarna av ett komplext tal. Realdelen av talet $4 + 3i$ är 4 medan imaginärdelen är 3 (men inte $3i$).

[10] En mängd där man kan använda alla fyra räknesätten (och dividera med allt utom talet 0) kallas för en talkropp. Av de talsystem som nämnts ovan utgör de *rationella*, de *reella* och de *komplexa* talen talkroppar. Förutom dessa finns det viktiga talkroppar som bara innehåller *ändligt* många tal, och det finns talkroppar som innehåller de vanliga bråken och som liksom de reella talen är *fullständiga* men som ändå inte beskriver punkterna på en linje. Talsystem av dessa typer har under senare år fått allt större praktiskt betydelse eftersom de bl.a. används inom datalogin.

Liksom begreppet *tal* har även begreppet *cirkel* vidgats och abstraherats i den moderna matematiken. Enklast kan dessa generaliseringar kanske förklaras med att cirkeln har så många speciella och viktiga egenskaper att det räcker med några få av dem för att få intressanta strukturer.

Hellre än att försöka att beskriva hur cirkeln används i modern matematik, så vill jag avsluta detta inledande avsnitt om cirkeln med att påpeka att allt eftersom den matematiska förståelsen av *cirkeln* har fördjupats så har också den fysikaliska förståelsen och de tekniska tillämpningarna av *rotationen* utvecklats.

7. Symmetri

I årtusenden har olika former av symmetri fascinerat människor och varit ett viktigt konstnärligt uttrycksmedel. Vissa former har varit tydliga och därför tidigt setts som symmetrier medan andra först under vårt eget århundrade kunde uppfattas som sådana. Även om ordet symmetri använts för många av dem så var det länge, svårt för att inte säga omöjligt, att se dem som olika yttringar av samma grundläggande fenomen. Anledningen till detta är att den struktur som behövs för att studera symmetri matematiskt inte upptäcktes förrän i början av 1800-talet.

De flesta människor har en intuitiv uppfattning om symmetri men få kan ge en precis beskrivning, d.v.s. vad som kan kallas för en definition. Den form av symmetri som de flesta kan se och som många uppfattar som ”den enda” är spegelsymmetrin. Det man då tänker sig är ett tredimensionellt föremål, t.ex. en människa, en boll eller ett hus. Sedan tänker man sig ett plant snitt ”mitt igenom” föremålet så att man får två halvor, som är likadana men ”spegelvända”. Varje tänkt snitt som ger två likadana halvor är då en symmetri. Även plana figurer kan innehålla spegelsymmetrier. Det finns dock symmetrier som inte är av detta slag.

Ett exempel på symmetrier som finns mitt ibland oss utan att vi ser dem är våra bokstäver (speciellt ”de stora”, kapitälerna). De flesta av våra stora bokstäver har någon symmetri så att vi kan läsa dem antingen i en spegel till höger (eller vänster) om papperet, eller i en spegel ovanför (eller under papperet) eller efter att ha vänt papperet upp och ned.

Om vi börjar med raden

A H I M O T U V X Y Å Ä Ö

så ser vi att alla dessa bokstäver kan läsas i en spegel till höger om sidan. Ställer vi sedan en spegel ovanför raden

B C D E H I K O X

så kan vi läsa alla dess bokstäver. Bokstäverna i raden

H I N O S X Z

kan vi däremot läsa utan spegel genom att bara vända boken upp och ned.

Om vi accepterar alla bokstäverna i den tredje raden (inbegripet N , S , och Z) som symmetriska så innebär detta att vi behöver ett allmännare begrepp än spegling för att beskriva symmetri. Det matematiska nyckelordet för att beskriva symmetrier är *transformation*. En transformation kan beskrivas som en ”förändring”. För att en förändring ska vara en symmetri måste den vara i två avseenden ”meningslös”. För det första ska förändringen kunna upphävas, vilket matematiskt uttrycks som att transformationen är invertibel, vilket innebär att det finns en annan (eventuellt samma) avbildning som upphäver den första, och för det andra ska den vara i någon mening ”osynlig”. Osynligheten betyder att det finns något väsentligt som *inte* har förändrats. (När vi vänder på pappret så är ett S fortfarande ett S.) En viktig följd av att vi uppfattar symmetrier som (osynliga) förändringar är att två förändringar kan utföras efter varandra, och resultatet blir då en ny (osynlig) förändring.

Detta ger en algebraisk struktur åt symmetrierna, d.v.s. man kan ”räkna med” symmetrier. Mängden av alla symmetrier (hörande till en viss figur eller ett visst system) kallas för *symmetrigruppen*. Det som behövs för ett matematiskt studium av symmetri är *grupp*-begreppet. Detta infördes år 1831 av en 21-årig student i Paris. Denne, ÉVARISTE GALOIS, hade studerat algebraiska ekvationer och insett när dessa kunde lösas. Det centrala i hans insikt var just gruppbegreppet. Galois fick aldrig något erkännande för sin upptäckt, eftersom han skrev ner det i ett brev till en vän – natten före en duell i vilken han blev dödad.

En matematisk beskrivning av såväl symmetri- som gruppbegreppet finns i Appendix G, som den intresserade kan läsa redan nu. Här kommer jag att enbart att beskriva några av de företeelser som vi numera betraktar som exempel på symmetrier, och jag kommer att något beröra dels deras förekomst i naturen, dels deras konstnärliga och tekniska användning. I detta sammanhang bör det också sägas att även om en allmän teori för symmetri inte uppstod förrän under 1900-talet, så har människor i alla tider varit väl förtrogna med många speciella symmetrier, och har också utnyttjat dem i skilda sammanhang.

Låt mig börja med att beskriva några välkända och viktiga symmetrier. En enkel symmetri som de flesta känner till är spegelsymmetrin. Denna kan beskrivas så att om vi ställer ett föremål framför en spegel, så ser vi en kopia av föremålet bakom spegeln. Denna kopia är nästan identisk med föremålet, och den enda skillnaden är att någonting är bakfram. Om jag framför spegeln håller ett papper med texten ”TAM” så kan jag i spegeln läsa ordet ”MAT”. Föremål som väl illustrerar den matematiska betydelsen av spegelsymmetrin är en klocka (lämpligen utan siffror) som ser exakt likadan ut i spegeln, men vars visare rör sig *motsols* (på engelska *counter-clockwise*) eller en vanlig tärning.[11]

Även om det normala är att en spegelbild i något avseende skiljer sig ifrån originalet, så finns det föremål som faktiskt är (åtminstone så långt som vi kan se med blotta ögat) identiska med sin spegelbild. Om ett föremål är identiskt med sin spegelbild så innebär detta att det i sig självt innehåller ett *symmetriplan* d.v.s. att vi kan skära sönder det längs detta plan och därigenom få två halvor som är varandras spegelbild. Tyngdpunkten hos ett föremål som har en spegelsymmetri ligger alltid i symmetriplanet. Detta är en egenskap som naturen länge utnyttjat vid konstruktionen av nya djurarter och som människan utnyttjat sedan hon lärde sig att tillverka stenyxor. Hos i naturen förekommande föremål är spegelsymmetrin aldrig helt perfekt, något som vi tydligt ser när jämför ett foto av oss själva med vår spegelbild. Det är kanske värt att påpeka att vi just när det gäller oss själva som regel känner spegelbilden bättre än originalet.

Även om spegelsymmetrin är den bäst kända, så finns det andra symmetrier som är viktigare såväl praktiskt som matematiskt. De symmetrier som påverkar oss mest är *rotations*– och *translations*-symmetrierna, varvid det bör påpekas att translationssymmetrierna kan vara av två slag, *diskret* eller *kontinuerlig*.[12] Den diskreta translationen kan beskrivas som en ständig regelbunden upprepning utan

[11] För att se att en tärning inte är likadan som sin spegelbild kan man hålla den i ett hörn, rikta det andra hörnet emot sig, och sedan se på detta andra hörn i spegeln. Därvid ser man att sidorna nu har fått en annan orientering.

[12] I matematiken används orden diskret och kontinuerlig som ett par av motsatser, varvid en sinnebild för det diskreta skulle kunna vara en skärgård där alla öar är isolerade från

början och slut, och den kan illustreras av en ensam människa som vandrar på sliprarna längs ett rakt järnvägsspår över en ändlös slätt. Den matematiska struktur som används för att beskriva denna symmetri är de hela talen

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Den kontinuerliga translationssymmetrin kan också illustreras av en rak linje över en ändlös slätt, men istället för en människa som kliver på sliprar bör man tänka sig en bil som rullar på en väg.

Det finns flera viktiga samband mellan rotationen och (främst den diskreta) translationen. Matematiskt brukar detta uttryckas på så sätt att de tillhörande symmetrigrupperna, sägs vara varandras *duala grupper*.[13] Fysikaliskt beror sambandet mellan dem främst på att en naturlig rotation alltid är *likformig* i den meningen att den sker med konstant (*vrid*)-hastighet. Därför ger jordens rotation runt sin axel en regelbunden upprepning av natt och dag, och rotationen runt solen ger oss årstidernas växlingar. På samma sätt kan en rotationspress användas för att producera ett ändlöst antal identiska tidningssidor.

Även om den levande naturen haft svårt att lära sig att utnyttja den fysikaliska rotationen så spelar dock dess stillastående motsvarighet, cirkeln en stor roll. Den egenskap som främst utnyttjas är att tyngdpunkten i en cirkel ligger i mittpunkten, vilket innebär att ett 3-dimensionellt föremål med en rotationsaxel har sin tyngdpunkt på denna. Eftersom ett träd måste balansera en stor tyngd på en (förhållandevis) liten spets, så uppvisar de flesta träd en mer eller mindre tydlig cirkelform. Detta exempel ger samtidigt en nästan övertydlig illustration av att ingen i naturen förekommande symmetri är perfekt.

En annan egenskap hos cirkeln som naturen utnyttjar är den *isoperimetriska olikheten*, d.v.s. det faktum att cirkeln är den geometriska figur som innanför en given omkrets kan innesluta den största ytan. Detta innebär att de flesta i (den levande) naturen förekommande rör är runda. Hos oss själva gäller detta exempelvis för våra blodkärl, luftrör och tarmar.

Även om inte heller translationssymmetrin någonsin är perfekt spelar även den en viktig roll i naturen. Den translationssymmetri som oftast förekommer i den levande naturen kan liknas vid bildrutorna i en spelfilm, där nästan samma ruta upprepas ett antal gånger med en liten, liten förändring från ruta till ruta ända tills en helt ny scen spelas upp på samma sätt. Den för oss kanske allra viktigaste förekomsten är dock den som finns i våra arvsanlag där fyra tecken omväxlar på en tråd som bokstäverna i en text.

Det finns också en typ av symmetri som är ett mellanting mellan den *kontinuerliga* rotationen och den *diskreta* translationen, nämligen den *diskreta* rotation som ges av ett kugghjul eller en regelbunden månghörning. Detta är en symmetri som sällan utnyttjas i den levande naturen (även om binas honungskakor utnyttjar speciella egenskaper hos den regelbundna sexhörningen) men som genom kugghjulet har spelat en oerhörd roll i vår teknik. Denna symmetri har också den matematiskt intressanta egenskapen att vara sin egen *dual*.

Avslutningsvis vill jag så nämna en symmetri som är så banal att den sällan överhuvudtaget upplevs som en symmetri, men som ändå spelat en stor roll i vår tekniska utveckling. Den symmetri det gäller kan beskrivas med orden att *identiska*

---

varann medan det kontinuerliga kan representeras av en kontinent där varje punkt hänger ihop med de övriga.

[13] *Dualitet* är ett av den moderna matematikens mest användbara begrepp. För en lekman kan det kanske rentav beskrivas som matematikens egen spegelsymmetri.

föremål är utbytbara och egendomligt nog var det faktiskt denna symmetri som ledde till upptäckten av gruppbegreppet, d.v.s. den matematiska struktur som gjorde det möjligt att förena alla olika symmetrier till ett enda begrepp.

KAP.2. DE NATURLIGA TALEN

1. Konsten att räkna I.

— Att räkna är väl ingen konst, det kan ju varenda människa.
— Nää, jag har hört att det finns infödingar i Afrika som bara kan räkna till tre, "Ett, Två, Tre, Många".

Detta är två vanliga uppfattningar om räknekonsten, en av de viktiga basfärdigheter som den moderna människan uppfattar som självklar. Men hur är det egentligen, kan alla människor räkna? Finns det "infödingar" som bara kan räkna till tre? Har människan alltid kunnat räkna? Detta är några frågor som jag hoppas kunna besvara i detta avsnitt.

Om vi börjar med den första frågan är det omedelbara svaret naturligtvis nej eftersom små barn sällan lär sig att räkna innan de fyllt åtminstone tre år. Men detta är å andra sidan inte riktigt vad vi menar. Vad vi menar när vi säger att alla människor kan räkna är att de allra flesta (vuxna) människor i världen har lärt sig att räkna och att detta gäller även dem som inte gått i skolan. Dessutom föreställer vi oss att räknandet är "naturligt" för människan, och vi tar mer eller mindre för givet att människan "i alla tider" kunnat räkna på samma sätt som vi gör. Om frågorna förtydligas på detta sätt så är det uppenbart att de allra flesta vuxna människor i världen idag kan räkna hjälpligt, helt enkelt därför att de flesta faktiskt räknar pengar. Om vi sedan med "naturligt" menar helt enkelt att de allra flesta människor kan lära sig att räkna så finns det därför också all anledning att säga att räknandet är naturligt. Trots detta är räknekonsten en i mänsklighetens historia ganska ny företeelse. Dessutom tog det mänskligheten tusentals år att lära sig denna svåra konst.

— Vad menar du egentligen. Nyss sa du att räknandet var naturligt för människan och nu säger du igen att det är en svår konst!

Ja, varför var det så svårt för mänskligheten att lära sig att räkna och varför är det så lätt för oss idag? Vari bestod svårigheten? Och varför är det så svårt för oss att inse att det som idag är så lätt en gång kunde vara så svårt? Dessa frågor hänger naturligtvis ihop och jag ska försöka att besvara dem tillsammans genom att först och främst besvara den centrala, d.v.s. vari bestod svårigheten.

För att förstå svårigheterna måste vi först och främst ta reda på hur människorna räknade förr. Eftersom alla historiska vittnesbörd om tidigt räknande kommer från skrivna källor så kan vi den vägen inte komma underfund om hur människorna räknade före uppfinningen av skriftspråket. Ändå tror vi oss veta en hel del om hur mänskligheten räknade dessförrinnan, något som vi lärt oss genom att studera naturfolk som under lång tid levt isolerade. Eftersom dessa folk som regel har en utvecklingsnivå som kan sägas variera ifrån vår egen "äldre stenålder" fram till en nivå strax före de äldsta "högkulturerna" så kan vi därmed förstå något om även den allra tidigaste räknekonsten.

Det som först slår och förvånar en modern västerlänning vid ett studium av naturfolks räknesystem är att dessa människor ännu inte lärt sig att räkna på fingrarna. Istället är de äldsta räknesystemen "binära" och använder talet *två* som en bas. Några av de mest ålderdomliga räknesystemen har hittats hos bushmän i Afrika samt hos isolerade grupper i Australien och Sydamerika. Det intressanta är nu att även om dessa folk använder olika ord så räknar de på i princip samma sätt, nämligen

ett, två, två-ett, två-två, två-två-ett, två-två-två,

och sedan har de inga fler räkneord. Däremot har de ofta rika och varierade möjligheter att säga "många".

Det är många som funderat över varför dessa isolerade kulturer räknat på i princip samma sätt och det finns två grundhypoteser som i stort sett utesluter varandra. Den ena av dessa antar att räknandet uppfanns så sent i människans historia att hon först erövrade hela jorden och sedan lärde sig att räkna. Anledningen till att hon då började att räkna med två som bas var att detta var det lättaste sättet. Den andra förutsätter att redan de första människorna som kom till Australien och Amerika hade börjat att räkna och att de räknade på ungefär samma sätt som dagens (eller åtminstone gårdagens) bushmän. Jag är av skäl som jag kommer att återkomma till senare, mest benägen att tro på den andra teorin.

Innan vi går vidare kan det vara värt att påpeka att det inte finns något samband mellan "hög intelligens" och avancerad kultur, så att anledningen till att vissa naturfolk inte har mer än drygt en handfull räkneord är därför inte att de på något sätt skulle vara ointelligentare än vi. Det enda skälet är istället att de, med sitt levnadssätt, helt enkelt inte har något behov av fler räkneord. Det är därför värt att notera att i en stenåldersby (i Afrika idag eller i Sverige för sex tusen år sedan) så finns det faktiskt inget behov av att kunna räkna. Den yttersta anledningen till detta är att när vi räknar ett antal objekt så är vi inte intresserade av deras *individualitet*. (Om vi ber om fem pennor så gör vi detta för att vi förutsätter att alla pennorna är likvärdiga.) I stenåldersbyn, där alla känner varann och där alla föremål är handgjorda finns det ingenting som saknar individualitet. Människor och djur nämns vid namn och eftersom de flesta föremål har en ägare och är igenkännbara så har även de ett slags namn såsom *Tors hammare*.

I detta sammanhang finns det anledning att nämna ett faktum som de flesta av oss av goda skäl är helt omedvetna om. Detta faktum är att det finns två sorter av naturliga tal. Anledningen till att vi är omedvetna om skillnaden är att när vi väl lärt oss att addera och multiplicera och därmed fått en känsla för talen så innehåller vårt talbegrepp båda sorternas tal. De enda sammanhang där skillnaden fortfarande spelar en roll är i grammatikböcker och avancerad matematik. De två sorterna av tal kallas vanligen *ordinal*tal och *kardinal*tal. I svenska språket brukar ordinaltalen skrivas

den första, den andra, den tredje, ...

och används för att ange en plats i en ordnad rad. De andra talen, de vanliga talen, kardinaltalen, skrivs naturligtvis

en, två, tre, ...

och används för att ange ett antal. Eftersom *två* är det *andra* talet och *tre* det *tredje* så använder vi så ofta kardinaltalen även som ordinaltal att vi aldrig har något behov av att vara medvetna om skillnaden. Ändå är det ju så att innan våra barn lär sig att lägga ihop två och två så brukar de kunna räkna till tio (eller tjugo eller hundra) vilket innebär att innan våra barn har något begrepp om kardinaltalen så har de använt namnen *ett, två, tre,o.s.v.* som ordinaltal. Ett av de teman som kommer att återkomma i denna bok är att det finns ett nära samband mellan hur vi som individer lär oss matematik i skolan (och på universitetet) och hur våra förfäder en gång förstod och utvecklade den. Utgående från detta samband finns det därför anledning att tro att de första talen också var ordinaltal och att de därför användes vid uppräkning snarare än för att ange antal. På sätt och vis är detta t.o.m. självklart eftersom det inte finns något namn för kardinaltalen innan ordinaltalen skapats. Däremot är det ju kardinaltalen som är de praktiskt användbara vilket innebär att sedan ordinaltalen väl skapats kunde man lära sig att lägga ihop dem och multiplicera dem.[14] Därmed tog kardinaltalen så småningom över och eftersom det är de som haft den största betydelsen, så skymmer de sikten för räknandets ursprung.

Den slutsats som följer av detta resonemang är alltså att det var de för praktiska ändamål betydelselösa ordinaltalen som uppstod först. Dessa kunde sedan användas som kardinaltal för att räkna får och getter. Detta leder till något som närmast framstår som en gåta nämligen, varför uppstod de? Ett svar på den frågan är att de ursprungligen användes i religösa och närmare bestämt rituella sammanhang. Förklaringen skulle då vara att det funnits riter där människor och djur räknades upp. För att förstå räknandets uppkomst måste man enligt denna teori gå till den äldsta religösa litteraturen och söka efter uppräkningar. I den hos oss bäst kända religösa skriften, nämligen Bibeln så förekommer uppräkningar dels i skapelseberättelsen och dels i berättelsen om syndafloden, som ju är berättelsen om ett återuppstående. En som framfört teorin om att räknandet har ett rituellt ursprung och att det sedan spritt sig över världen är den amerikanske matematikern och matematikhistorikern Abraham Seidenberg. Dennes (och andras) teori har två utgångspunkter. Den ena är det välkända faktum att det i de allra flesta kulturer finns (eller funnits) en skapelsemyt om hur världen omkring dem en gång uppstod. Den andra är den allmänt omfattade uppfattningen att myter som regel återgår på tidigare riter. Konsekvensen av dessa två antaganden blir då att skapelsemyten återgår på en ännu mycket äldre skapelse*rit*, en rit som var så gammal att redan de första invandrarna till Australien och Amerika bar den med sig. Det var en årligt återkommande rit som utvecklades olika på olika håll. Den gladdes åt, förebådade, eller rent av frambringade livets återfödelse och naturens uppblomstring efter den svåra årstiden – antingen denna var vintern i norr eller torkan i söder. På några håll där människorna levde nära varann och det därför var många som deltog i riten kan uppräkningen av de närvarande eller av de för riten betydelsefulla ha tagit allt längre tid och därmed utgjort ett allt viktigare inslag i den.

Det finns inga säkra bevis för att det var så som talen fick namn och därmed räknandet uppstod men det finns ändå mycket som talar för det. Kanske var detta vad KRONECKER[15] menade med det berömda uttalandet:

”Gud gav oss de naturliga talen, allt annat är människors verk.”

2. Konsten att räkna II.

I och med att talen någon gång någonstans fått sina första namn så uppstod frågan ”hur många?”. Man räknade knivar och bytte mot spjut och talen spreds över världen. Och när de spreds var det som *kardinal*tal de spreds. När frågan hur många väl hade ställts måste människorna lära sig räkna och att räkna på riktigt. De tal de behövde var inte så många men de betecknade antal och undan för undan behövdes det flera.

I egendomslösa kulturer var behoven små och två eller två-två och två-två-två räckte för allt. Med ägandet växte behoven och mer avancerade talsystem uppstod. Även om det finns (och har funnits) stenålderskulturer med högt utvecklade

[14]Samma svårigheter som våra förfäder hade innan de kunde lära sig att räkna med små tal uppstod i slutet av 1800-talet när matematikerna började kunna räkna med oändligt stora tal. För dessa visade det sig nödvändigt att återinföra distinktionen mellan ordinal– och kardinaltal. I den matematiska logiken förekommer därför både oändliga ordinaltal och oändliga kardinaltal. Mer om detta finns i appendix O.

[15]Kronecker (1823-1891) var en tysk matematiker som bland annat gav viktiga bidrag till talteorins utveckling.

räknesystem så tillhör dessa undantagen, utom i de fall där kulturen haft kontakt och bedrivit handel med grannfolk. De första behoven av mer omfattande räknesystem uppstod förmodligen med boskapsskötseln.

Ett studium av enkla räknesystem, samtida eller historiska, tycks visa, att i kulturer där behovet av större tal ökade långsamt så fick först talet tre eller talen tre och fyra egna namn. Under en tid som kunde vara ganska lång uppfattades sedan dessa tal som ofantliga och användes som allmänna förstärkningsord ungefär som när vi säger "jättegott". Ett välkänt uttryck som ger ett tydligt exempel på detta är det franska *trés bien* d.v.s. mycket (=trefalt) bra.[16] Nästa steg blev att orden för tre och fyra kombinerades till exempelvis *tre-två, tre-tre, fyr-tre* innan man upptäckte att handen har fem fingrar. Därefter utnyttjade man fingrar, händer och fötter och kunde därigenom ge namn åt alla tal upp till tjugo. Man kunde till exempel räkna ungefär på följande sätt:
Ett, två, tre, två-två, hand, tre-tre, hand-två, fyra-fyra, ett-från-två (händer), två-händer
varefter man fortsätter med tårna vilket ger fortsättningen
händer-ett, händer-två, händer-tre, händer-fyra, händer-fot, händer-fot-ett, händer-fot-två, händer-fot-tre, ett-från-man, man.

Detta är visserligen inte någon exakt översättning av något enda faktiskt existerande räknesystem, men det innehåller vissa drag som har varit allmänt förekommande. Dels innehåller det ett relativt avancerat användande av händer och fötter och dels finns det kvarlevor av tidigare räknesätt där man kanske inte räknade längre än till *fyra-fyra.* Samtidigt ger detta exempel en antydan om det som var den stora svårigheten. Det gällde nämligen att bygga upp ett system som både var enkelt och åskådligt för de små talen och tillräckligt systematiskt för de större. Det är också värt att notera att exemplet innehåller främst additioner men också två subtraktioner och en multiplikation.

Före uppkomsten av ett myntsystem fanns det för vanliga människor sällan något behov av större tal än tjugo. Behövde man någon gång räkna fler än tjugo föremål så kunde man räkna antalet *tjog.* Detta sätt att tänka och räkna syns tydligt i danskan där talen från femti till hundra beskrivs som

> halva tredje (tjoget) eller *halvtress*, tre tjog eller *tress*, halva fjärde eller *halvfjers*, fyra (tjog) eller *fjers*, halva femte eller *halvfems* och slutligen fem tjog eller *fems.*

Även i andra språk finns rester av samma sak såsom i franskans *quatre-vingt* (fyra-tjugo) för åttio. Tjog-räknandet blev dock otympligt när antalet tjog närmade sig tjugo helt enkelt därför att talet fyrahundra visade sig vara lite för stort som nästa enhet.[17] Istället blev det fem tjog, d.v.s. talet *tio gånger tio* som fick ett namn och blev nästa enhet. Valet av hundra som "enhet" ledde också till att talet tio så småningom ersatte tjugo som en bas även för tal upp till hundra. Efter att talen tio och hundra blivit enheter blev det naturligt att ge egna namn åt *tio gånger hundra* d.v.s. tusen och så småningom även åt *tio gånger tusen.*

Sammanfattningsvis så kan vi konstatera att upp till fyra eller fem kunde man räkna "direkt" genom att peka, sedan kunde man räkna till ungefär tjugo genom att bilda grupper om fem och tänka "additivt". För att räkna längre så blev man

---

[16]Det finns också grekiska och latinska uttryck som visar det samma exempelvis *trismegistos* ($\tau\rho\iota\sigma\mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau o\varsigma$), trefalt störst, eller *ter felix* (trefalt lycklig). Även vårt eget *fyrfaldiga* leve, är ett uttryck för att fyra var ett stort tal.

[17]Den kultur som var närmast att utveckla ett rent "tjugotals-system" var Mayakulturen i Mellanamerika, men även de nöjde sig med att (förmodligen av religiösa skäl) använda talet 360 (i stället för 400) som "hundratal".

tvungen att tänka ”multiplikativt”. Det kan också vara värt att påpeka att enstaka kulturer (oftast för religösa ändamål) utvecklade avancerade talsystem redan innan de hade ett skriftspråk men att den vidare utvecklingen av räknekonsten vanligen förutsatte något sätt att skriva talen.

3. Konsten att skriva

I alla tider har mänskligheten använt tekniska hjälpmedel för att lösa sina matematiska problem. Vid uppräkningar använde hon fingrar och tår, knutar på snören, skåror på pinnar eller högar med småsten. Vid additioner använde hon stenar (något som ordet *kalkyl* från latinets *calculus* = sten) ännu idag påminner oss om, och för multiplikationer ritade hon rutor i sanden. De tecken hon använde var naturliga och uppstod spontant, nästan likadant överallt. Vissa av hjälpmedlen, som knutarna på snöret eller stenarna i påsen gjorde det också lätt att minnas och flytta informationen. Detta innebär att det sedan urminnes tider funnits ett ”skriftspråk för matematik”. Möjligheten av att det kunde gå att överföra ett komplicerat budskap på annat sätt än genom en budbärare som lärde sig det utantill och sedan återberättade det var däremot närmast otänkbar. När tanken väl uppstod så berodde det till stor del på att man redan skaffat sig ”skrivvana” genom att hålla på med komplicerad matematik.

Det hade börjat med att man för att underlätta handel och skatteindrivning hade använt lerkulor för att ange antalet får i fårhjordar. Detta var ett system som hade använts i årtusenden, och som undan för undan hade utvecklats. Det började med att man hade en kula för varje djur, sedan införde man olika slags kulor för olika djur, så att man genom kulorna kunde skilja på får och getter, tackor och baggar eller lamm och vuxna djur. Dessutom förändrades sättet att bära kulorna. Ursprungligen förvarades kulorna i läderpåsar, så började man trä upp dem på läderremmar vars ändar förseglades med sigill, och till sist lade man kulorna i lerbollar. Därigenom blev det omöjligt för herdarna att dölja sina egna stölder genom att ta bort en kula för varje försvunnet djur. Nackdelen var att det samtidigt blev omöjligt för herden att visa upp bollens innehåll, något som gjorde det nödvändigt att ange detta på utsidan. När man ändå genom att göra markeringar i leran angav hur många kulor man hade inuti så kunde man ju också ange vilka kulor man hade, om de var stora eller små, unga eller gamla och kanske något annat som mottagaren ville veta.

Så småningom kom man till en situation där det var tydligt att budskap med ett ”matematiskt innehåll” kunde skickas ”skriftligt”, medan man hade svårt att föreställa sig att det skulle gå att översätta talat språk, d.v.s. *ljud* till bilder. Kanske var det de gester som man använde vid kontakt med främlingar kanske var det konstnärernas symboliska bilder som ledde fram till övertygelsen om att det gick att meddela sig med tecken. Oavsett hur tanken uppkom så ledde den till att det för ungefär femtusen år sedan i någon av de sumeriska städerna satt en grupp präster som utarbetade ett skriftspråk. Det tog dem kanske tio år att komma överens. Det de hade att utgå ifrån var de lertavlor och kilar som de använde för sina räkningar och det de måste enas om var vilka begrepp de behövde och hur dessa skulle tecknas.

Från Mesopotamien spred sig idén till Egypten i väster och till Kina i öster. Det utvecklades därför minst tre olika skriftspråk som gick olika öden till mötes. Alla skriftspråken var ursprungligen bildspråk med ett tecken för varje begrepp och utformningen av tecknen berodde främst på vilket material man skrev på samt vad man använde för att skriva med. I Egypten och Kina så hade man bra material vilket innebar att det gick lätt att utveckla teckenspråket, medan sumererna och deras efterföljare i Mesopotamien hade det svårare med sina lertavlor. Deras skriftspråk var därför redan från början mer symboliskt, d.v.s. mindre avbildande än de övriga. Dessutom erövrades sumerriket så småningom av babylonierna som talade ett språk av en helt annan språkfamilj. Dessa övertog sumerernas skriftspråk men tvingades anpassa det efter sitt eget. Det som då inträffade var att de började använda sumeriska tecken för egna ord som *lät* likadant. Detta innebar att det kom in ett *fonetiskt* element i skriftspråket. Som en följd av detta lyssnade man alltmer på hur språket lät, och upptäckte att språket inte bara bestod av *ord*, utan att orden i sin tur bestod av stavelser. Därmed uppstod möjligheten av att använda samma tecken i ord som inte hade någonting med varann att göra — utom att de hade en stavelse gemensam. Allt eftersom man tränade upp öronen kunde skriften bli alltmer fonetisk. Detta innebar att tecknen ifrån att ha varit symboler för begrepp övergick till att beteckna först ord, sedan stavelser och så småningom även enstaka *fonem*, de som vi numera vanligen betecknar med en enda bokstav. Resultatet blev att medan hieroglyferna användes i några tusen år i Egypten men sedan försvann, och Kinas skriftspråk fick utvecklas oberoende av yttre inflytande och med årtusendenas gång blev allt mer komplicerat, så förenklades kilskriften vid varje anpassning till nya språk och nya kulturer.

Ett betydelsefullt utvecklingssteg togs när fenicierna utvecklade sitt eget skriftspråk. Såsom sjöfarare och handelsmän hade dessa livliga förbindelser med både egypter och babylonier. De kunde därför kombinera fördelarna med båda skriftspråken, något som innebar att de skrev på egyptisk papyrus och utvecklade ett alfabet som främst inspirerats av förenklade former av kilskrift. Feniciskan var dock precis som akkadiskan, det språk som talades av babylonierna, och egyptiskan ett semitiskt språk, något som gjorde att vokalerna mest var till besvär och därför helst utelämnades. När grekerna något senare började bedriva handel i det östra medelhavsområdet fick även de behov av ett skriftspråk. De utgick ifrån feniciernas alfabet, tog bort några onödiga tecken och införde istället vokaler. Det brukar sägas att det grekiska alfabetet var det första som var tillräckligt lätt för att alla skulle kunna lära sig det. Det grekiska alfabetet övertogs och bearbetades sedan ytterligare av romarna för att bättre passa till latinet. Det är det latinska alfabetet som idag används i större delen av världen. De nackdelar som detta alfabet har beror främst på att latinet inte hade behov av särskilda tecken för *sje-* och *tje*-ljud, vilket inneburit att de flesta språk uppfunnit egna bokstavskombinationer för att skriva dem.

4. Det sexagesimala talssystemet

Hur det egentligen gick till när mänskligheten lärde sig att räkna lär vi så här i efterhand aldrig få veta och inte heller kommer vi att säkert kunna bestämma när eller varför. Det enda vi säkert vet är att människan kunde räkna innan hon lärde sig att skriva. Det finns dock all anledning att anta att uppfinnandet av räknekonsten var en del av den stora *Neolitiska Revolutionen*[18], den som på ett par tusen år för all framtid förändrade människans sätt att leva. Det tycks ha börjat med att människor i tättbefolkade delar av världen började bruka jorden genom att med eld eller spade rensa bort växtligheten på en lämplig yta och sedan sätta egna frön för att få de växter hon själv ville ha där. Med jordbruket kunde fler munnar mättas vilket ledde till fler människor och en aldrig tidigare anad befolkningstäthet. Snart blev byarna större och några av de allra största

[18] *Neolitium* (= ny sten) är det vetenskapliga namnet för ”den yngre stenåldern” och kan enklast beskrivas som tiden från det första jordbruket till den första metallhanteringen. I Länderna runt Eufrat och Tigris omfattar den närmare fem tusen år och övergår ungefär 3500 fvt i Bronsåldern.

omgärdades med murar och övergick till att bli befästa städer. Detta ledde till en differentiering av näringslivet därigenom att sådant som tidigare gjorts i enskilda hushåll nu började utföras av professionella hantverkare. Det ledde också till ett klassamhälle med rika och fattiga, styrande och styrda. Båda dessa förändringar ledde till att det uppstod yrkesgrupper som fick tid och möjlighet att arbeta med sådana uppgifter som att bygga hus, tillverka lerkärl, administrera skatteinkomster eller tillverka smycken. På kort tid, d.v.s. några tusen år, lärde man sig bl.a.

att tämja (ett flertal nya) djur, bygga staket och hålla boskap,
att tillverka fibrer av växter och att väva tyger av ull eller växtfibrer
att bränna lera för att göra krukor och tegel
att bearbeta de ädla metallerna guld och silver och att tillverka brons av koppar och tenn,
att använda drejskivor vid formandet av lerkärl
att göra vagnar som rullade på hjul.

Av stor betydelse för utvecklingen var religionens makt. I de tidiga samhällena fanns ett nära samband mellan världslig och religös makt på så sätt att antingen var översteprästen regent eller så var kungen överstepräst eller rentav en gud. Detta innebar att prästerna hade både religösa ceremoniella och världsliga administrativa uppgifter. För att lära sig att utföra dessa behövde de utbildning vilket ledde till att ett nytt yrke uppstod, nämligen lärarens. I den intellektuella miljö som därigenom skapades var räknandet en viktig del.

Så småningom uppstod de första verkliga högkulturerna i några stora floddalar från Gula Floden (Hoang-ho) i öst till Nilen i väst. Den äldsta kända högkulturen grundades av *Sumererna* i den södra delen av Tvåflodslandet *Mesopotamien*. Deras rike som uppstod under det fjärde årtusendet fvt och styrdes av ett prästerskap var ovanligt betydelsefullt. Det sumeriska prästerskapet var förmodligen den första av de många priviligierade intellektuella grupper som senare haft så stor betydelse för mänsklighetens utveckling, och det var knappast en tillfällighet att det blev de som utvecklade det första skriftspråket. Dessa präster var nämligen inte bara religösa ledare och administratörer, de hade också ett flertal andra viktiga uppgifter. De avkunnade domar och behandlade sjuka, de byggde tempel och palats och de anlade bevattningsanläggningar som i tretusen år gjorde södra Mesopotamien till ett av världens mest tättbefolkade områden. Dessutom bidrog de till utvecklingen av hjulet, drejskivan och metallhanteringen.

Grunden för deras intellektuella verksamhet var religionen och räknekonsten. De mätte och vägde, observerade stjärnor och drev in skatter. Allt blev tal som måste adderas och multipliceras, subtraheras och divideras. För detta utvecklade de ett sätt att *skriva* tal som gav dem större möjligheter att utföra beräkningar än några av sina samtida. Det finns mycket som tyder på att man vid mätningar till att börja med använde olika talsystem när man mätte längder, volymer och vikter, men att så småningom det system som användes vid vägningar blev alltmer dominerande. Eftersom man inte hade mynt så använde man fasta vikter av rent silver som ”valuta”. Den ursprungliga viktsenheten var en *mana* men när alltfler fick tillgång till silver så blev den ursprungliga enheten för stor, och man använde halva, tredjedels, fjärdedels och även femtedels mana. För att få ordning på viktssystemet så införde man därför en mindre vikt på sådant sätt att alla de tidigare använda vikterna kunde anges med heltal.[19] Den mindre enheten blev en *sikel* och det gick 60 sikel på en mana. När man skrev ner resultatet av sina vägningar så skrev man först antalet mana med stora tecken och sedan antalet sikel med små. Systemet kan visserligen ses som ett system där man går från

[19]Observera att 1/60 är den minsta gemensamma nämnaren för talen 1/3, 1/4 och 1/5.

en sextiondels mana till sextio mana eller från 1 sikel till 3600 sikel, men för de sumeriska prästerna var det helt enkelt ett system som gick från en sikel till 60 mana. Även om skillnaden mellan stora och små tecken så småningom minskade så kände man aldrig något verkligt behov av att tala om vad som var antalet mana och vad som betecknade antalet sikel. Det fanns f.ö. också en ännu större enhet, nämligen 1 *talent* som bestod av 60 mana och en ännu mindre enhet *sje,* av vilka det gick 60 (vad annars) på en sikel. Detta innebar att man med fyra "siffror" kunde gå från en sje till 60 talenter, vilket motsvarade 12960000 sje. En talent var vikten av en kubikfot vatten, d.v.s. drygt 9 kg, så att en sje var ungefär 42 mg.

Det bör påpekas att detta talsystem hade utvecklats ur mätningar av en *kontinuerlig* storhet och inte som ett resultat av uppräkning. Det var därför snarare ett sätt att beteckna *reella* än naturliga tal. Eftersom systemet var förhållandevis effektivt så kom det att användas även för att beteckna annat än vikter och blev snart det dominerande talsystemet. Därigenom kom det också att användas i skolorna, vilket ledde till att det snart uppstod övningsuppgifter vars svar låg långt utanför den ursprungliga räckvidden för systemet. Eftersom systemet redan från början hade uppstått därför att man ville uttrycka bråkdelar som hela tal så blev det naturligt att upprepa förfarandet för bråkdelar och bråkdelar av bråkdelar och så småningom började man också att skriva större tal med samma metod. Detta betydde alltså att tecknet för 1 plötsligt kunde beteckna alla tal av formen $1 \cdot 60^n$. Samtidigt kvarlevde tolkningen av talen så att varje tecken uppfattades som ett heltal gånger en viss enhet vilket gjorde att sumererna och deras efterföljare babylonierna aldrig kände ett behov av att med ett "decimalkomma" ange en absolut enhet. Det talsystem som utvecklades i Babylonien brukar kallas *sexagesimalt* och var för vetenskapligt bruk oöverträffat ända fram till uppfinningen av decimalkommat i 1500-talets Europa.

Det bör också påpekas att även om systemet var bra för många ändamål så hade det ändå några allvarliga brister. Den första av dessa var den som jag berörde ovan, d.v.s. avsaknaden av ett decimalkomma som talade om vad som var grundenheten. Den andra, som så småningom visade sig vara allvarligare och som också delvis rättades till, var avsaknaden av en nolla. Det var därför svårt, för att inte säga omöjligt, att skilja på talen 61 och 3601 som båda skrevs med två ettor, en etta för 60 *eller* 3600 och en för ett. Bekymret var att man inte hade någon nolla som talade om att det fanns ett tomrum mellan den första och sista ettan i talet 3601. Eftersom varje tecken betecknade ett visst antal av en lämplig (vikts)enhet så föresvävade det dem aldrig att de skulle behöva (eller ens kunna) tala om att de inte hade några mana alls. Denna brist blev så småningom kännbar och under det sista årtusendet fvt så införde man ett tecken för att visa detta tomrum. Däremot användes aldrig detta tecken för att skilja på talen 1 och 60.

En tredje brist låg i de räknemetoder som hängde ihop med systemet. Detta hade utvecklats för att underlätta division med talen 2, 3 och 5 samt produkter och potenser av dessa, på så sätt att man först bestämde det *reciproka* talet, 30 för 2, 20 för 3, 12 för 5 o.s.v. Istället för att *dividera* med 5 kunde man *multiplicera* med 12. Problemet var naturligtvis att man inte kunde dividera med 7 eller 11 på detta sätt och de svårigheter detta innebar ledde till att det i den babyloniska matematiken fanns två sorters tal, dels de *reguljära,* de som bara innehöll primfaktorerna 2, 3 och 5, dels de övriga som var irreguljära och utmärkta för addition, subtraktion och multiplikation, men som man ogärna dividerade med.

Även om dessa rent matematiska brister var allvarliga nog var det ändå något helt annat som ledde till att 60-talssystemet så småningom föll ur bruk och som också gjorde att det aldrig blev helt allenarådande ens i Babylonien. Det allra största felet med systemet var nämligen att det inte hade uppstått ur talspråkets sätt att räkna. Detta innebar att medan de babyloniska prästerna satt i sina torn och kammare och gjorde beräkningar för tempelbyggnader, dammar och månförmörkelser så gick herdarna på fälten och räknade sina djur i tiotal och hundratal, samtidigt som främmande härförare räknade sina trupper i tusental.

Innan systemet föll ur bruk hade det dock satt sina outplånliga spår. Ännu i dag går det ju nämligen 60 minuter på en timme och 60 sekunder på en minut och ett helt varv består fortfarande av 360 grader.

5. Pythagoras sats

Vår moderna värld är full av raka linjer och räta vinklar som alla är tillverkade av människan. I orörd natur är det ont om raka linjer och de räta vinklarna saknas helt. Båda den raka linjen och den räta vinklen är därför skapelser av människan. Även om vi inte vet när begreppen uppkom så är det troligt att de båda uppstod under den neolitiska revolutionen. Det finns två skäl för detta antagande, ett empiriskt och ett teoretiskt. Det empiriska skälet är att de äldsta fyrkantiga hus som vi funnit rester av är mindre än 10 000 år gamla, och att på de ställen där man hittat de äldsta lämningarna, så har man hittat spår av runda hus som är äldre. Det teoretiska skälet är att i den orörda naturen finns det varken naturliga räta linjer eller något behov av konstgjorda sådana. Med jordbruket kunde det däremot på många håll uppstå stora släta ytor som behövde delas mellan stammar, byar eller enskilda brukare. Det är därför också troligt att de första räta linjer som skapades av människor inte var vägar utan gränser. Det var två olika egenskaper hos den räta linjen som var betydelsefulla för dess uppkomst. Den ena egenskapen var naturligtvis att den är den kortaste vägen mellan två punkter och detta var betydelsefullt därför att om ägor skulle separeras med diken, staket eller murar så var det praktiskt att ha korta gränslinjer. Den andra egenskapen som är mindre tydlig men som möjligen spelade en ännu större roll var symmetriegenskapen. Om en åker skall delas i två lika stora delar så är det naturliga sättet att göra detta att dra en rät linje tvärs över åkern. På samma sätt uppstår den räta vinkeln när man vill dela en åker i fyra delar. (Det kan i detta sammanhang nämnas att det första matematiska påstående som påstås ha blivit bevisat var att ”en diameter delar en cirkel i två lika delar”, något som sägs ha bevisats av Thales under 500-talet fvt.)

I de stora floddalarnas högkulturer där åkrarna kunde bre ut sig milsvitt blev de räta linjerna allt viktigare. När befolkningstätheten växte och människorna slöt sig samman i större byar och bostäderna kom nära varann så var det naturligt att låta tomterna vara rektanglar, och när man började bygga bostäder med flera rum så blev innerväggarna raka och vinklarna räta. När byarna växte och blev städer och både härskare och präster blev mäktigare så blev också de tempel och palats som byggdes allt större. Allt detta ledde till att räta linjer, räta vinklar och *rektanglar* blev allt viktigare.

Ett problem som uppstår så snart man vill tillverka rektanglar och kvadrater är nu att det är svårt att mäta vinklar, t.o.m. de räta. Medan det är lätt att med ett måttband eller ett vanligt snöre kontrollera att sidorna är parvis lika, så är det svårt att se om vinklarna i hörnen verkligen är räta. Även med tillgång till vinkelhake är det ofta svårt att få tillräcklig precision eftersom vinkelhaken som regel är mycket mindre än sidorna i rektangeln. Det finns dock ett gammalt knep, känt bland hantverkare och byggmästare i hela världen, för att avgöra om vinklarna i en parallellogram är räta. Knepet är att mäta diagonalerna – är de lika så är vinklarna räta, annars inte. Eftersom detta knep bygger på en symmetri som är intuitivt uppenbar så kan vi anta att det tillämpats överallt där tillräckligt välgjorda rektanglar förekommit. Detta skulle betyda att vanan att mäta diagonalerna är lika gammal som rektanglarna själva. Eftersom det också var naturligt att föreskriva att sidorna i de använda rektanglarna, antingen det gällde tomter eller hus, skulle vara ett visst antal enheter, steg, alnar, fot eller tum, så bör man mycket tidigt ha noterat att om man hade en rektangel vars långa sida var 4 enheter (alnar eller något annat) och vars korta var 3, så var diagonalerna alltid 5 enheter. Senare stötte man på sidorna 6 och 8 med diagonalen 10 eller sidorna 5 och 12 med diagonalen 13. I den mån som det fanns räknekunnigt folk i närheten, vilket det som regel gjorde när man byggde tempel, så började de fundera över dessa märkliga rektanglar. De försökte hitta andra rektanglar där såväl sidor som diagonaler hade heltalslängder, och de funderade över vad det var för magiska egenskaper hos talen $3, 4,$ och 5 eller $5, 12,$ och 13 som kunde göra vinklarna i rektanglarna räta. Mycket snart bör man ha upptäckt sambandet mellan kvadraterna d.v.s. att $3^2+4^2 = 5^2$ och att $5^2+12^2 = 13^2$, och där det fanns präster som hade tid att räkna så sökte man säkert andra tal med samma egenskap. Genom enkla prövningar bör man då ha hittat först $7, 24, 25$ och sedan $8, 15, 17$ eller $9, 40, 41$. Resultatet var alltid rätt! Varje gång som man hittat tre heltal a, b och c sådana att $a^2 + b^2 = c^2$, och som man tillverkade en rektangel med sidorna a och b så visade det sig att diagonalerna var c.

Detta var den upptäckt varur *matematiken* föddes. För att kunna upptäcka detta mystiska samband mellan tal och rätvinkliga trianglar måste man naturligtvis kunna räkna och man måste också kunna lite geometri. Eftersom de flesta hantverk innehåller ett moment där längder översätts till längdenheter så fanns det ju naturligtvis ett praktiskt samband mellan geometri och tal. Ändå gick den nya upptäckten utanför allt vad man kunnat föreställa sig ens i sin vildaste fantasi. Det var den första upptäckten av att de hela talen var något annat än ett hjälpmedel för handel och hantverk och gav ny näring åt gamla föreställningar om att talen hade ett gudomligt ursprung.

Pythagoras sats (som vi numera kallar detta samband mellan sidorna och diagonalerna i en rektangel) var i sin aritmetiska form (d.v.s. som en sats om heltal) känd i alla högkulturer och det är oklart när den upptäcktes och om kunskapen spreds eller om satsen upptäcktes gång på gång, om och om igen.

Det brukar vanligen antas att kunskapen spreds, men eftersom den från början alltid formulerades som en sats om rektanglar och hela tal och eftersom den i denna form är lätt att observera, så finns det inget som talar emot att den faktiskt upptäcktes i flera av de antika högkulturerna. Det vi vet är att satsen var känd i Babylon 2000 år fvt och i Kina senast 1000 år fvt.

6. Matematik och vetenskap

Matematiken har under senare århundraden spelat en oerhört stor roll för vetenskapens utveckling och uppfattas idag av de flesta som en formalistisk och ganska trist vetenskap. Det kan därför vara överraskande att dess ursprungliga uppgift var att hjälpa forntidens präster i deras religösa uppgifter. Detta är dock ingenting som utmärker just matematiken, utan även andra vetenskaper som astronomin, fysiken och kemin, hade en förvetenskaplig period, då kända fakta tolkades i sin tids föreställningsvärld. Eftersom religionen förr hade en central roll i allt tänkande innebar detta att både stjärnornas gång på himlen och blixt och dunder sågs som bevis på gudarnas makt. Det enda speciella med matematiken är att den så tidigt blev vetenskap att dess förvetenskapliga period till stor del var förhistorisk.

Det bör också påpekas att även om matematiken gjordes till vetenskap redan av grekerna, så har den alltid haft svårt att bli riktigt accepterad av de empirister som i alla tider betraktat sig själva som de enda sanna realisterna.[20] Istället var det under 15– och 1600-talen, d.v.s. den vetenskapliga revolutionens århundraden i Europa, de religösa mystikerna med sin övertygelse om att Gud skapat världen matematiskt, som trodde på möjligheten av en matematisk teori för världen.

Dagens fysiker är inte lika övertygade om att universum skapades av en Gud, men de har helt accepterat sina föregångares övertygelse om att universum bara kan beskrivas matematiskt. Tvärtom betraktas den tidigare empirismen som ganska enfaldig. *Hur har människan någonsin kunnat tro att de erfarenheter vi kan skaffa oss på jorden med våra begränsade sinnen någonsin skulle kunna förklara både det mikroskopiskt lilla som vi inte kan se och det ofantligt stora som vi aldrig kan nå?*

7. Matematik och mystik

Det fanns en tid för mycket längesedan när alla frågor hade ett svar. Allt kunde förklaras och allt kunde påverkas. Så var det under den forntid som våra förfäder betraktade som mänsklighetens guldålder, den tid som sedan följdes av silveråldern, bronsåldern och järnåldern och som vi nu kallar för stenåldern. Det var en tid när mänskligheten ägnade tre timmar om dagen för att skaffa sig mat och när hon var en del av naturen. Det var också en tid när jordens totala befolkning var mindre än en tusendel av dagens och det var en tid som aldrig kommer tillbaka.

Det svar som fanns och som besvarade alla frågor var: ”Det är gudarnas vilja”, och det sätt man hade att påverka var att be gudar om hjälp. Varje by hade sina egna gudar och i varje by fanns en man eller kvinna som kände gudarna bättre än någon annan.

Allt levande hörde ihop och allting hade en själ. Mitt i den synliga, kroppsliga världen fanns det en annan, en osynlig, andlig. Detta var den verkliga världen, och människans öde styrdes av den. För att rå i sin egen värld behövde hon nå till den andra. Det var för att nå till gudarnas värld som riterna skapats och det var medicinmannen, *schamanen*, som ledde riterna. Det fanns riter för allt, för liv som för död. Det fanns riter för jakt och för dag och för natt. Det fanns riter med böner och droger och andlig extas. Det fanns riter med eld och riter med blod. Det fanns riter med dans och med trummor och sång. Det var riter vid fest och riter vid sorg. Människan levde i tvenne världar och riterna band dem samman.

Byar växte och byar försvann och människan spreds över världen. Gudar föddes och gudar dog och alla nåddes med riter, och riter uppkom och riter försvann och när de försvann blev de myter.

I varje by fanns en hövding, som styrde i stort och i smått. Vad byn skulle göra beslöts av dess hövding, men hur det gick bestämdes av gudar, och den som kände gudarnas vilja, det var schamanen. Honom bad man om hjälp, och den hjälp man behövde var alltid densamma – fler djur i skogen och framgång i jakten. Och alltid gnällde de gamla och sade att det varit bättre förr.

Och så var det, det var bättre förr och det hade alltid varit bättre förr. När byn grundades var skogen runt den full av vilda djur som var lätta att jaga, men allt efter som byn blev större så måste man jaga mer och djuren blev färre. Man måste jaga över allt större områden och när man nådde till grannbyns jaktmarker så minskade villebrådet snabbt. Antingen blev det krig, eller så måste några ge sig av för att bosätta sig någon annanstans.

Inga riter hjälpte – när skogen saknade djur återvände även den skickligaste jägaren tomhänt. Så länge som det fanns någonstans att ta vägen kunde byarna

[20]Ordet empirist kommer från grekiskans empiri som betyder erfarenhet. Empiristerna ansåg att all kunskap grundas på erfarenhet.

flytta, men när skogen var tom och det fanns byar åt alla håll så långt som någon kunde gå, så blev gudarnas befallning att stanna där man var och leva på gräs.[21]

Det må ha varit gudarnas vilja eller människornas tanke – i några byar kunde man lära sig att äta gräs och att få det att växa. När man hittade djur i skogen så dödade man dem inte utan fångade och tog hem dem. Kanske hade man tänkt ge gudarna offer för att djuren skulle återvända till skogen, men gudarnas vilja, förstådd av schamanen, var något annat. Kon fick föda sin kalv och man offrade kalven.

Det tog sin tid men det gick. Med gudarnas hjälp kunde man bruka jorden och få sin föda. Byarna växte, människorna kom närmare varann och de blev fler och fler – ända tills torkan kom. Åter bad man gudarna om hjälp, än en gång offrade man det man kunde. Man offrade djur, man offrade människor, ingenting hjälpte. Än en gång måste man flytta. Räddningen blev att flytta till floden, trots att man inte var först.

Vid floden samlades allt fler människor i allt större byar medan allt fler gudar krävde sina offer. Allt fler levde på att tolka gudarnas vilja och ju fler prästerna blev, ju mäktigare blev deras gudar. När gudarna blev mäktigare måste prästerna ägna allt mer tid åt att tolka deras vilja, och ju mer tid som prästerna ägnade åt sina gudar ju strängare blev dessa. Allt måste göras vid rätt tid och på rätt sätt.

För att bestämma den rätta tiden så studerade man natthimlens stjärnor och månens faser. För att göra på rätt sätt så följde man bestämda, tydliga regler. Det fanns regler för allt, för vad som sades och hur det sades, för vad som offrades och när det offrades, för prästernas klädsel och altarets form. Och alltefter som tiden gick så blev reglerna alltmer exakta, och plötsligt krävde de matematik.

Det som behövdes var både aritmetik och geometri. Tidens gång, månens och planeternas vandring över himlen fordrade räkning, men skapade också en insikt om cirkelns betydelse. Ritning av kultplatser, altare och tempel fordrade geometri, men för det praktiska utförandet med stenar och stockar behövdes det åter aritmetik.

Det finns många vittnesbörd som stöder tesen att nästan all förhistorisk och tidig historisk matematik hade ett rituellt, religöst ursprung. Den allra äldsta matematiken, det rena räknandet, är naturligtvis helt förhistorisk och kan bara studeras genom de spår den avsatt i senare tiders tänkande och föreställningar. I det moderna västerlandet finns det mycket få sådana spår och det enda som kan sägas vara helt allmänt är vår vana (eller ovana) att betrakta talet 13 som ett olyckstal. I den antika världen fanns det mycket fler liknande föreställningar. De kanske mest kända är de som brukar tillskrivas Pythagoras och hans efterföljare pythagoréerna. För dessa gällde bl.a. att *allt är tal*, vidare var de udda talen manliga och de jämna kvinnliga. Talet ETT var Gud och både jämnt och udda, medan fem var giftermålstalet.

Det finns också bland många kulturer *tabu*-föreställningar om räknande, av sorten att om en mor räknar sina barn så kommer ett av dem att dö och om en herde räknar sina djur så kommer ett att bli taget av vargen (*"räkna tyst, vargen kan höra!"*). Det ligger nära till hands att förklara dessa idéer med att räknandet faktiskt varit förknippat med risker, exempelvis på så sätt att det var i samband med en räkning av hjorden som schamanen utvalde de djur som skulle offras. Detta är därmed ett av indicierna för att räknandet ursprungligen ingick i ett rituellt sammanhang.

De äldsta spåren av *geometri* finns på krukor av lera och om dessa kom till bara för sin skönhet eller om de också hade en symbolisk betydelse vet vi inte, men de

[21] Det gräs man åt var främst *vete*.

vittnar ändå om att geometriska former som cirklar, trianglar och fyrkanter var kända i stora delar av världen redan för mer än 5000 år sedan. De tidigaste kända användningarna av geometri kan ses i tempel från sumerisk tid. Sumererna förberedde sina tempelbyggnader genom att sätta pinnar i marken och spänna röda snören mellan dem. Dessa snören kvarlämnade röda linjer som kunnat hittas under ruinerna av de nedfallna templen, och tack vare dessa vet vi mer om det geometriska kunnandet hos sumererna än hos de tidiga grekerna.

När det slutligen gäller de äldsta skrifterna med geometriskt innehåll så finner vi dessa på kilskriftstavlor ifrån Babylonien. Det finns också indiska skrifter, *Sulvasutras*, om altarkonstruktioner som visar att de indiska prästerna långt före vår tideräkning hade förbluffande kunskaper i geometri. Det råder en stor osäkerhet om hur gamla dessa skrifter är och framför allt gäller frågan om ifall de skrevs före eller efter Pythagoras tid. Denna fråga är av speciell betydelse eftersom bland de problem som de indiska prästerna studerade fanns två av de klassiska problemen i den grekiska geometrin, nämligen cirkelns kvadratur och kubens fördubbling.

8. Stora tal.

— *Vad är ett stort tal?*

Ända sedan människan började räkna har hon fascinerats av stora tal. Ännu idag kan nya världsrekord när det gäller att hitta stora primtal komma in som notiser i våra dagstidningar, och det enda som skiljer oss från våra förfäder är att vi dagligen läser om tal som de tyckte var ofantliga och obegripliga. Under de årtusenden som gått sedan våra förfäder lärde sig att räkna ena handens fingrar har därför de stora talen blivit allt större.

Som jag tidigare nämnt fanns det en tid då talet tre var på gränsen till det oräkneliga och därför var ett stort tal. När sedan nomaderna började äga hjordar med tiotals och kanske hundratals djur så blev hundra och tusen stora tal. Fortfarande är ju talet hundra tillräckligt stort för att vi ska hinna gömma oss medan någon räknar högt till det.

Vad som menas med att ett tal är stort beror delvis, men bara delvis på vad det används till. I själva verket finns det all anledning att säga att talet hundra faktiskt är stort, och för våra ögon och våra händer är redan tio och tal strax däröver stora. Om vi ser på en samling individer så kan vi se hur många de är om de inte är fler än ungefär sju eller åtta, men vi kan inte *se* om de är nitton eller tjugo. Om antalet är större måste vi antingen ordna dem i grupper eller helt enkelt räkna tyst för oss själva. Mer allmänt kan det sägas att vi inte har någon intuitiv uppfattning om antal som överstiger några hundra. Detta märks bl.a. på hur vi reagerar på nyheter om katastrofer i världen, eftersom en olycka med fem döda svenskar kan få minst lika mycket uppmärksamhet som en olycka med femtusen döda kineser. Det märkliga är därför att vi, trots att vi inte förstår dem, ändå behärskar att räkna med både miljoner och miljarder.

Den främsta anledningen till detta är att vi idag dels har räknesätt som gör det möjligt för oss att nå till stora tal med få operationer och dels har konventioner som gör det möjligt att skriva ner dem. Ett drastiskt exempel på detta är talet $9^{(9^9)}$, som är ett tal med mer än 10^8 siffror. För att lära oss att handskas med stora tal har vi därför dels behövt hitta effektiva metoder att åskådliggöra talen och dels behövt lära oss alltmer avancerade räknesätt.

Jag kommer i detta avsnitt främsta att ägna mig åt olika sätt att skriva tal som användes innan de arabiska siffrorna erövrade världen.

Allt skrivande av tal började med raka streck för entalen, på det sätt som vi fortfarande använder vid röstsammanräkningar. Nästa steg var också alltid detsamma, nämligen att införa särskilda symboler för fem eller tio, och sedan ytterligare tecken för lämpliga multipler av tio. Detta sätt att skriva tal hängde naturligt ihop med det sätt på vilket de flesta kulturfolk under antiken räknade och likaså med de räknebräden som användes. Ett räknebräde, eller en *abakus* bestod av en flat skiva med rännor, och i varje ränna fanns det plats för tio kulor.

Den enda nackdelen med dessa sätt att skriva tal var att uttrycken blev klumpiga och svårlästa. Allteftersom skriftspråken och sjöfarandet utvecklades blev denna nackdel alltmer besvärande och de främsta sjöfararfolken, fenicierna och grekerna övergick till att skriva sina tal med en blandning av tecken för tal och tecken för ljud, så att till exempel ett tal som 256 kunde ha skrivits som

$$u\,\mathrm{h}\;\; * * * * * \,\mathrm{t}\;\; \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet.$$

Så småningom kom bokstäverna helt att ersätta de tidigare taltecknen, något som gjorde talen lätta att läsa och skriva. Det vi idag ser som den stora nackdelen, detta att de inte var lämpliga för beräkningar, spelade då ingen roll eftersom alla beräkningar ändå utfördes med en abakus.

Senare fick, hos både fenicier och greker, *alla* bokstäver ett värde som tal och ganska snart började man roa sig med att lägga ihop bokstäverna i orden. När då två individer upptäckte att deras namn hade samma talsumma så var detta alltid ett gott tecken inför en förestående affär, eller inför ett äktenskap. Det blev också populärt att som en gåta uppge sitt tal istället för sitt namn.[22]

När sedan judarna, utgående från det feniciska alfabetet, skapade ett eget skriftspråk, så övertog de också det feniciska sättet att skriva sina tal. Även för judarna fick därmed orden ett tal, något som vi tydligt kan se på flera ställen i Bibeln, i både Gamla och Nya Testamentet. Inom judendomen brukar denna form av talmystik kallas *Kabbala.* Den har spelat (och spelar?) en stor roll i religöst judiskt tänkande. Det bör dock påpekas att den inte bara förekommit inom judendomen utan även inom annan orientalisk mystik. Dessutom går själva grundidén, den att företeelser med en yttre likhet också har en djupare andlig gemenskap som gör att de kan påverka varann, tillbaka till urminnes tider långt före vår tideräkning. Det är i princip samma idé som när en medicinman sticker en bild av en fiende med en nål, i förhoppning om att därigenom såra den som bilden föreställer.

Man har också framfört teorin om att geometrin uppstod ur en liknande, men äldre *geometrisk gematria* där ett centralt inslag var att bygga altare med exakt samma yta. Detta skulle i så fall vara ursprunget till ett av den antika geometrins centrala problem, nämligen det som brukar kallas *cirkelns kvadratur* och som handlar om att konstruera en kvadrat med *samma yta* som en given cirkel.

I det grekiska talsystemet användes 27 olika bokstäver, varav dock tre stycken var ålderdomliga tecken som funnits i det feniciska alfabetet. I huvudsak följde man den vanliga bokstavsordningen så att bokstäverna *a,b,c,d,e* (eller rättare $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$) stod för talen 1,2,3,4 och 5. Efter η (= 9) och ι (= 10) följde κ, λ och μ för 10, 20 och 30 o.s.v. till $\varrho(= 100)$ varefter man hade tecken för de jämna hundratalen upp till 900. Detta innebar att man med tre bokstäver kunde skriva alla tal upp till 999. Därefter hade man ett slags positionssystem, så att 1000 skrevs som $'\alpha$, d.v.s. med en *markerad* etta. På detta sätt hade man möjlighet att skriva talen upp till 999 999. Samtidigt bör det påpekas att stora tal sällan behövs för praktiska ändamål

[22]Denna form av talmystik brukar kallas för *gematria.* Den utgår från att alla bokstäver står för ett tal, och att summan av dessa tal ger orden ett numeriskt värde. Det karakteristiska är sedan att om namnen för två personer eller orden för två saker har samma värde så har de ett *andligt* samband och kan därför påverka varann.

eftersom de nästan alltid kan ersättas med stora enheter (exempelvis ton istället för gram eller mil istället för centimeter).

I mindre praktiska sammanhang såsom talmystik eller ren matematik finns dock inte denna möjlighet och då kan stora tal ofta spela en viktig roll. För pythagoréerna, som var verksamma i de grekiska kolonierna i södra Italien i mitten av det sista årtusendet fvt, var både matematiken och talmystiken centrala element i deras religösa föreställningsvärld. Grundaren av "pythagoréerna" var PYTHAGORAS, som efter resor i Egypten, Babylon och kanske även Indien bosatte sig i staden Kroton i Södra Italien. Han kom dit år 540 fvt vid ungefär 40 års ålder och var verksam där till sin död år 500. Han grundade en skola och bildade ett "brödraskap" (som även innehöll kvinnor) av sina lärjungar. Detta överlevde mästarens död och spelade en stor roll i 400-talets grekiska filosofi. Genom PLATON, som under ett antal år efter SOKRATES död år 399 fvt, studerade matematik och filosofi under ledning av sin tids främste pythagoré, ARCHYTAS, kom många av deras idéer att påverka det andliga livet under hela antiken och genom kristendomens förmedling ända in i vår egen tid. Även om pythagoréerna inte grundade den grekiska matematiken så var deras närmast fanatiska intresse för den en av de viktigaste drivkrafterna bakom dess uppblomstring vid denna tid.

För pythagoréerna var talen bokstavligt talat heliga. Deras valspråk var "ALLT ÄR TAL" och talet ett var Gud själv. Förutom att grundaren lärt sig matematik av babylonierna och därigenom fått del av deras talmystik var det två av deras egna vetenskapliga bedrifter som ökade intresset för talen. Den ena av dessa var upptäckten av de rena tonintervallen och den andra var ett geometriskt bevis för "Pythagoras sats". Upptäckten av de rena intervallen fick främst en filosofisk, närmast religiös, betydelse på så sätt att alla harmonier i naturen antogs bero på förhållanden mellan hela tal, och bidrog enbart till att stärka tron på talens betydelse.

Den andra bedriften fick en helt annan betydelse och kom att hota hela grundvalen för deras världsuppfattning. Vi vet ju att "satsen" redan hade varit känd i minst halvtannat årtusende, men att den dittills uppfattats som ett samband mellan vissa trianglar och vissa hela tal. När pythagoréerna hittade sitt geometriska bevis så var den outtalade förutsättningen att sidorna i triangeln var hela tal och den omedelbara följden blev att de genast försökte att bevisa att i varje triangel fanns en gemensam enhet så att alla tre sidornas längder var heltalsmultipler av denna. Den metod de använde för att göra detta brukar kallas Euklides algoritm och används numera främst inom talteorin.[23] Metoden ledde till att sidorna indelades i allt mindre enheter och att därmed antalet enheter blev allt större. Till att börja med så bidrog säkert önsketänkande och mätfel till att de alltid förr eller senare fick ett helt antal enheter, men med tiden växte tvivlet. Ju noggrannare konstruktionerna utfördes ju mindre enheter fick de och ju större blev sidornas tal. Till sist upptäckte någon i brödraskapet att det inte stämde. Den geometriska figur som var själva symbolen för brödraskapet, nämligen *pentagrammet* (d.v.s. den regelbundna femstjärnan) innehöll ett förhållande som inte kunde uttryckas som ett förhållande mellan hela tal. Detta förhållande brukar kallas "det gyllene snittet" och kan med moderna beteckningar skrivas som $(\sqrt{5}-1)/2$. Den fasansfulla upptäckten var att då algoritmen användes en gång så dök samma figur och samma förhållande upp igen. Detta innebar att hur många gånger de än upprepade den så kunde den aldrig leda till en gemensam grundenhet som gjorde det möjligt att uttrycka båda de sökta längderna som hela tal. Något senare (möjligen rentav något tidigare) upptäckte de också att inte heller förhållandet mellan diagonalen

[23]Se appendix E

och sidan i en kvadrat kunde uttryckas som ett förhållande mellan hela tal.[24]

Detta var en upptäckt som för pythagoréerna var lika fruktansvärd som ett bevis för att Jesus aldrig hade levat skulle ha varit för den kristna kyrkan. Reaktionen blev också densamma som den skulle ha blivit inom kyrkan, nämligen att upptäckten tystades ner och för en lång tid förblev deras egen fruktansvärda hemlighet. Vetenskapliga upptäckter kan dock inte hållas hemliga i all evighet och sedan upptäckten av de irrationella talen blivit känd så förlorade de hela talen sin överhöghet i den grekiska matematiken. Istället tog geometrin överhanden och utvecklades på några århundraden till den enda vetenskapliga teori i antiken som bestått ända in i vår egen tid.

Trots detta levde intresset för de naturliga talen kvar i den grekiska matematiken och filosofin och spelade en stor för deras tankar om oändligheten. I Aristoteles bok om fysiken diskuterar han huruvida det finns oändligt många tal eller inte. Bakgrunden är naturligtvis att oändligheten i sig är något overkligt samtidigt som man redan då insåg att talen aldrig tar slut. Aristoteles lösning på problemet blev att införa begreppen *aktuell* och *potentiell* oändlighet. Med denna uppdelning av begreppen kunde han sedan hävda att mängden av (de naturliga) talen var potentiellt, men inte aktuellt, oändlig. I Euklides Elementa handlar tre böcker om talteori. Några av de intressantaste resultaten handlar om *primtal* och bl.a. bevisar han att det finns oändligt många primtal.[25]

Den antike matematiker som mest fascinerades av stora tal, var dock den störste av dem alla, nämligen Arkimedes, som skrev två arbeten som handlade om stora tal. Det ena av dessa var ett räkneproblem om boskap vars lösning bestod av tal som med vårt sätt att skriva dem skulle ha behövt mer än 250.000 siffror. Det andra var det berömda arbetet *Sandräknaren*, där Arkimedes uppskattar hur många sandkorn som skulle behövas för att fylla hela universum. Detta arbete är intressant av två skäl, dels innehåller det en beskrivning av Aristarchos heliocentriska universum[26] och dels innehåller det en beskrivning av tal så stora att de inte ens ryms i dagens största datorer. Arkimedes sätt att komma fram till och beskriva dessa mycket stora tal är fantastiskt och imponerande. Han utgår ifrån det största tal som hade ett namn i den grekiska matematiken. Detta tal kallades en *myriad*, ett ord som fortfarande används för att ange ofattbart stora antal, och betecknade talet tiotusen. Arkimedes började med att bilda talet *en myriad myriader*, d.v.s. 100 millioner och sedan multiplicerade han detta tal med sig självt en myriad myriader gånger. Ändå var han inte nöjd utan gjorde om samma sak några gånger till och han gav sig inte förrän han hade kommit fram

[24]Ett förhållande mellan två längder sades vara mätbart eller *kommensurabelt* om det kunde skrivas som ett förhållande mellan hela tal, d.v.s. om det fanns en gemensam grundlängd som gick ett helt antal gånger i båda. Idag kallar vi ett sådant förhållande *rationellt* medan motsatsen kallas *irrationellt*. Det pythagoréerna upptäckte var därför, med modernt språkbruk, existensen av irrationella tal.

[25]Eftersom Euklides tycks ha varit väl förtrogen med Aristoteles arbeten så säger han inte rakt ut att antalet primtal är oändligt, utan han nöjer sig med det skenbart svagare påståendet att det inte finns något största primtal.

[26]Aristarchos från Samos (c:a 310 – 230 fvt) skrev ett arbete *Om solens och månens avstånd och storlek* där han dels räknar ut avståndet till månen och solen och sedan med hjälp av dessa uppskattningar också deras storlek. Även om han grovt underskattade avståndet till solen och därmed också dess storlek så kom han ändå fram till att solen var ungefär 250 gånger större än jorden. Han drog också den naturliga slutsatsen av sina beräkningar genom att anta att det inte var solen som snurrade runt den stillastående jorden, utan istället var den lilla jorden som snurrade runt den stora solen.

till ett tal som vi skriver som $10^{8\cdot 10^{16}}$ vilket om vi kunde skriva ut det skulle bestå av en etta med 80 000 biljoner nollor efter sig. När han väl åstadkommit detta stora tal så räknar han ut hur många sandkorn han skulle behöva för att fylla hela universum, och han kommer också fram till att det inte skulle behövas så värst många (vilket innebar att det inte behövdes mer än ungefär 10^{60}!).

Arkimedes beräkningar ledde till uppskattningen att universums diameter inte kunde vara större än knappt fyra ljusår (för att använda ett modernt mått) och även om vi idag tror att universum har en diameter om kanske 20 *miljarder* ljusår, så dröjde det faktiskt mer än två tusen år innan vetenskapen kunde föreställa sig ett universum större än det som Arkimedes hade beräknat. I fantasi och tankekraft är *Sandräknaren* ett av antikens mest storslagna verk, väl jämförbart med Egyptens pyramider.

9. Att räkna med bråk I.

Matematiken är en skapelse av den mänskliga hjärnan, en skapelse som uppstod då människan började räkna och mäta. Det var dock inte räknandet och mätandet i sig utan det var hennes försök att beskriva, tolka och förstå vad det var hon gjorde som var av betydelse och gav upphov till matematiken. Hittills har vi huvudsakligen ägnat oss åt de svårigheter våra förfäder hade med att förstå sitt räknande men nu kan det vara dags att åtminstone beröra mätningens problem.

Vi kan därvid liksom i fallet med räknandet börja med att konstatera att stenåldersmänniskan som regel hade mycket små behov av att mäta och ännu mindre behov av att ange resultatet i annan form än ett konstaterande av att

den här käppen är tillräckligt lång
eller
din fisk är tyngre än min.

Med jordbruk, ägande och mer organiserade samhällen blev dock behovet av mätningar allt större. Tidiga former av organiserade arbeten som förutsatte mätningar bör ha varit uppförandet av större byggnader, vägar och bevattningsanläggningar. Allmänt kan vi säga att så snart som ett *konstruktionsarbete* kunde delas mellan flera individer som arbetade oberoende av varann så krävdes det mätningar och måttangivelser för att delarna skulle passa ihop. För tidiga arbeten bör precisionskraven ha varit så små att måtten kunde anges med ett antal *steg* eller möjligen *fot*. För kortare längder använde man handsbredder eller tummar och allmänt förefaller det som om man i alla kulturer följde regeln att *människan är alltings mått*, d.v.s. att alla längdmått utgick ifrån människokroppen och dess delar. När arbetena blev större, husen högre och antalet arbetare fler, så ökade kraven på precision. Detta innebar inte att man införde nya sorter men däremot att de som fanns blev standardiserade. Istället för att var och en mätte med egna fötter eller händer så använde man mätkäppar eller snören av givna längder.

Alltefter som samhällena blev alltmer komplicerade så växte behoven av mätning och dessutom var det alltfler som var beroende av mätningarnas resultat. Nu kunde det gälla att mäta mängden säd som skulle betalas i skatt till kungen eller den mängd olivolja som skulle ges i utbyte mot en oxe. I alla högkulturer infördes standardmått för längder, ytor, volymer och vikter. Längd– och ytmåtten hängde som regel ihop på så sätt att ytorna var kvadrater på längderna medan volymerna däremot inte var kuber utan istället beskrevs med hjälp av lämpliga kärl som urnor, kannor och senare tunnor. När sedan metallerna alltmer kom att användas som betalningsmedel vid handel så uppstod också ett större behov av vikter.

Vid alla dessa mätningar var det som skulle mätas något *kontinuerligt* och resultaten borde därför ha angivits som *reella tal*. Sådana hade man inte utan allt man hade var standardmått och hela tal. Det man gjorde var naturligtvis att först mäta antalet fot, och sedan se efter hur många tum som blev över. Krävdes det ännu större precision kunde man också mellan tumstrecken lägga in ett eller flera extra streck. Därmed uppstod halvor, tredjedelar och ibland även fjärdedelar eller femtedelar. Trots att dessa bråkdelar inte uppfattades som tal utan som fysiska storheter utgjorde de ett intellektuellt problem i alla de tidiga kulturerna. Innan vi går vidare kan det vara värt att notera att vissa språk fortfarande uppfattar en halv som ett mittstreck eftersom orden för *halv* och *mitt* är nära besläktade.[27] Det vanligaste sättet att hantera problemet var att man undan för undan införde mindre enheter, ner till den gräns som mättekniken tillät och mätbehoven krävde. Sättet att göra detta var som regel att man lät en lämplig bråkdel som kunde vara alltfrån en halv eller en tredjedel upp till 1/12 eller 1/24 av den tidigare minsta enheten bli en ny enhet. Denna typ av måttsystem har, efter *metersystemets* införande nästan försvunnit ur praktiskt bruk i Sverige, men det var ännu för några få år sedan vanligt i anglo-saxiska länder där det gick 12 *tum* på en *fot* vid mätning av längder, 16 *uns* på ett *pund* vid vägning och 12 *pence* på en *shilling* och 20 skilling på ett *pund* när man räknade pengar. Ändå är det ju alltid så att hur små enheter vi än använder så händer det gång på gång att vi inte kan bestämma oss eftersom det vi mäter tycks hamna mitt emellan två streck.

Sammanfattningsvis kan vi alltså konstatera att mänskligheten i praktiken försökte undvika bråk genom att övergå till mindre enheter. Ändå fanns det intellektuella problemet kvar och i de kulturer där det fanns präster eller andra som hade tid att ägna sig åt matematik så studerades det intensivt under långa perioder. Vilka problem som ställde till störst svårigheter varierade och berodde främst på hur man skrev sina bråk. I Egypten införde man tidigt en symbol som motsvarade vårt $1/x$ vilket innebar att man kunde tala om och skriva *en* tiondel eller *en* 43-djedel men inte om två eller flera. Detta gjorde att man för att skriva talet 2/43, som kunde vara svaret på hur mycket vete en man skulle få om två tunnor delades mellan 43 personer, måste skriva det som en summa av enstaka bråkdelar. Bland de gamla papyrusrullar som hittats och som rör matematik är detta ett av de viktigaste problemen. Exempelvis skrev man

$$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}.$$

Nu bör det påpekas att det finns andra lösningar på detta problem, och att vi också kan skriva t.ex.

$$\begin{aligned}\frac{2}{43} &= \frac{1}{24} + \frac{1}{258} + \frac{1}{1032}\\ &= \frac{1}{30} + \frac{1}{86} + \frac{1}{645}\\ &= \frac{1}{40} + \frac{1}{860} + \frac{1}{1720}.\end{aligned}$$

Moderna matematikhistoriker har därför studerat de exempel som förekommer i de gamla papyrusrullarna för att försöka att förstå vilka metoder som användes. Hittills har man dock inte hittat något system utan det förefaller som om det var en utveckling som pågått under lång tid och där olika matematiker utvecklade olika system.

Ett intressant sätt att hantera bråkräkning var det sexagesimala talsystem som användes i Mesopotamien och som vi behandlat tidigare. De reciproka tal

[27] Italienska *mezzo* och portugisiska *meio* har båda den dubbla betydelsen av halv och mitt.

som användes i detta system gjorde det lätt att räkna med de reguljära talen, d.v.s. de som bara innehöll primfaktorerna 2,3 och 5, medan t.ex. sjundedelarna fortfarande var ett problem. Det är dock värt att notera att systemet gjorde det lätt att beräkna närmevärden inte bara för bråkdelar av irreguljära tal utan också för kvadratrötter och lösningar till mer komplicerade andragradsekvationer.

10. Att räkna med bråk II.

Med pythagoréernas upptäckt av sambandet mellan hela tal och musik fick bråktalen en helt ny innebörd och betydelse. Deras upptäckt var att om två strängar, av samma material och med samma spänning klingade harmoniskt tillsammans så fanns det ett enkelt samband mellan längderna. Om den längre strängen gav grundtonen så gav en hälften så lång sträng oktaven, en som var 2/3 gav kvinten och 3/4 gav tersen. Även de andra rena tonintervallen svarade mot enkla samband mellan "små" hela tal.

Att förhållanden mellan storheter kunde vara av intresse kände man naturligtvis till tidigare både i Grekland och i de andra tidiga kulturerna. Ett sådant förhållande som åtminstone erfarenhetsmässigt var känt överallt är att *ytskalan är kvadraten på längdskalan* och *förhållandet mellan volymerna är kuben på förhållandet mellan längderna.* Det var därför inte detta att man studerade förhållandet mellan längder som var nytt, utan det nya var att det förhållande som man fann kunde ses som en kvot mellan *hela* tal.

Förhållandet mellan storheter kom sedan att spela en viktig roll i grekernas vetenskap. Eftersom produkten och kvoten mellan förhållanden ger nya förhållanden så var det naturligt för dem att multiplicera och dividera bråk. Det finns däremot som regel ingen naturlig tolkning av summan mellan två förhållanden vilket innebar att addition och subtraktion av bråk inte förekom förrän långt fram i tiden. För oss som får lära oss bråkräkning redan i grundskolan och som redan från början ser dem som *tal* kan det vara svårt att förstå att hur viktiga bråken än var i den grekiska matematiken så uppfattades de inte som tal. De enda *tal* som grekerna (och deras föregångare och samtida) förstod sig på var de som vi än idag kallar *naturliga tal.*

Den situation där det var lättast att använda den mindre storheten för att mäta den större var när man jämförde längder. Detta innebar att man *geometriskt* kunde hantera storheter som inte var givna som hela tal, och eftersom både addition av längder och multiplikation av dem hade en geometrisk tolkning (som längd eller yta) så kunde de utveckla en stor algebraisk färdighet. Deras metoder brukar beskrivas med termen *geometrisk algebra* och utgjorde en viktig del av deras geometri. En följd av att alla storheter tolkades geometriskt var att de kunde multiplicera två längder för att få en yta, tre för att få en volym, men att fler än tre längder inte kunde multipliceras.

Under de sista århundradena fvt kom dock de grekiska matematikerna och (inte minst viktigt) astronomerna i förnyad kontakt med den babyloniska kulturen och även om de inte övertog det sexagesimala talsystemet i sin helhet, så tog de ändå vara på det väsentliga, nämligen idén att när de behövde ökad precision så delade de sin minsta enhet i 60 lika delar. Dessa kallades (sedan de översatts till latin) minuter och om de behövde ännu större noggrannhet så delade de minuterna i 60 sekunder. För matematiskt bruk gick de ännu längre vilket innebar att de kom ganska nära ett decimalbråkssystem. Det var dock mest astronomer som använde dessa tal och eftersom de sällan hade anledning därtill så multiplicerade inte de heller mer än två tal med varandra.

Det bör också nämnas att några få av de främsta grekiska matematikerna, speciellt Arkimedes och senare DIOFANTOS, som var verksam i Alexandria vid mitten av 200-talet, åtminstone hade en intuitiv uppfattning om både rationella och reella tal.

Jag vill sammanfatta dessa två avsnitt om bråk och bråkräkning med att säga att för det första fanns det före införandet av de arabiska siffrorna och positionssystemet inget riktigt bra sätt att skriva bråk. För det andra hade bråken visserligen använts i två olika sammanhang med helt olika tolkningar, men trots detta var de egentligen olämpliga i båda fallen. Anledningen är att de oftast användes i samband med *kontinuerliga* storheter och för dessa är det *reella tal* som behövs och inte rationella. Även om reella tal som regel inte kan uttryckas exakt med enbart siffror, så att vi oftast tvingas att räkna med närmevärden som är rationella tal (numera vanligen decimalbråk), så är strukturerna hos talsystemen helt annorlunda. Det var inte förrän de europeiska matematikerna med hjälp av decimalbråken började förstå de reella talen som de rationella talen under de senaste århundradena fick en egen roll. I den moderna matematiken används de rationella talen främst inom algebran. De används därvid inte som närmevärden utan det är de exakta talen som är viktiga.

KAP.3. CIRKELN

1. En helig form

Det brukar sägas att cirkeln är den första form som ett litet barn lär sig att känna igen och det finns anledning att tro att det också var den första form som våra förfäder uppfattade. Till skillnad mot den räta linjen förekommer ju nämligen cirkeln även i den orörda naturen. På dagen lyser den runda solen och på natten månen som även den är rund så ofta den kan. Träd är runda och även blommor och frukter. De första husen var runda och när elden tändes på kvällen så satt man i cirkel omkring den. Det första man gjorde med lera var en boll och när man plattade till den så blev den en cirkel. Överallt där människor levat hittar man cirklar. Några dyrkade solen som värmde på dagen, andra prisade månen som lyste i mörkret. Överallt där människor fanns anades cirkelns makt.

Det som rör sig för evigt, rör sig i cirklar, solen på dagen och stjärnorna på natten, och långt före båge och pil användes slungan vid jakten. Ringen är evig som form och symbol och människan såg den som helig.

2. En naturlig form

Även om cirkeln var helig så var den också, bokstavligt talat, naturlig och lätt att skapa. Det enklaste sättet att åstadkomma cirklar och ringar var kanske att kasta en sten i en stilla sjö, men även en deg- eller lerklump som rullas mellan händerna blir snart rund. De äldsta föremål av lera vi funnit var alla runda och i alla dekorationer förekom cirklar. De äldsta kända heliga byggnaderna i världen hade formen av en rund kupol.[28] Sammantaget visar detta att även om cirkeln förblev helig så var den inte förbjuden utan var istället den första form som människan lärde sig att tillverka.

Det är troligt att de första runda föremål som människan lärde sig att tillverka var just kulor och bollar som rullades mellan händerna. Ganska snart lärde hon sig dock att även tillverka cirklar med hjälp av ”passare”. Detta gjordes så att man i båda ändar av en lina band fast spetsade pinnar. Den ena av dessa sattes ner i marken och hölls fast av en person medan en annan drog den andra ett varv runt. Denna teknik var känd bland sumererna.

Ett hantverk som tidigt blev betydelsefullt var krukmakeriet. Lerkärl gick visserligen lättare sönder än korgar och skålar av levande material men detta kompenserades av att de var lätta att tillverka och kunde utsättas för eld. Vi kan anta att de första lerkärlen var små, men ganska snart upptäckte krukmakarna att de kunde tillverka större kärl genom att rotera lerklumparna och utnyttja rotationen för att forma kärlen. Så småningom kom man också på att man kunde tillverka även mindre kärl med samma teknik om man lade lerklumpen på en tung rund skiva med en lämplig spets mitt under. På detta sätt uppfanns *drejskivan* som möjligen var den första användningen av *rotationen* för produktion av nyttoföremål.[29] Arkeologiska utgrävningar har visat att drejskivor användes av sumererna mer än 3000 år fvt.

3. Hjulet

[28]Byggnaderna som av grekerna kallades *tholos*, (pluralis, *tholoi*) har hittats i *Tall Arpachiya* i norra Irak. De byggdes förmodligen omkring år 5000 fvt.

[29]Det är möjligt att användningen av en *slända* för att spinna garn av ull var en ännu äldre uppfinning. Detta skulle i så fall kunna innebära att kvinnor utnyttjade rotationen tekniskt innan män gjorde det.

Även om både sländan och drejskivan var viktiga steg i en utveckling som inneburit att människan på alltfler sätt tagit cirkeln i sin tjänst så var det naturligtvis *hjulet* som var den avgörande uppfinningen. Hjulet var inte bara en viktigare utan på många sätt också en ”svårare” uppfinning än drejskivan. Även om vi antar att tekniken att flytta tunga lass (exempelvis båtar) genom att rulla dem på stockar var urgammal så är steget från en roterande lerklump till en drejskiva kortare än steget från stock till hjul. Det var betydligt större tekniska hinder som måste övervinnas. Dessutom kan det antas att de första hjulen inte var mycket mer effektiva än de stockar man tidigare använt. Möjligen var det så att en begynnande brist på lämpliga stockar gjorde det nödvändigt att använda de som fanns effektivare, möjligen användes de första hjulen i rituella eller religösa sammanhang där deras symboliska betydelse var viktigare än deras effektivitet.

Arkeologiska utgrävningar visar att sumererna använde hjulet 3000 år fvt. Sedan utvecklades hjulet främst genom att alltfler delar tillverkades av metall vilket gjorde dem hållbarare. Det förefaller också som om de första hjulen var fastsatta på axlar som följde med i rotationen och en förutsättning för den vidare utvecklingen blev tillverkningen av *glidlager* som gjorde det möjligt att använda hjul som snurrade runt sitt nav. Hjulet fick snart en militär betydelse eftersom tekniskt utvecklade folk lärde sig att tillverka hästdragna stridsvagnar. Därmed kunde de använda hästar i strid, vilket för en tid gjorde dem närmast oövervinnliga. Det dröjde däremot betydligt längre innan hjulet fick än jämförbar fredlig betydelse.

Oavsett hur och varför uppfinningen tillkom så innebar hjulet att människan blivit den första levande varelsen i jordens historia som lärt sig att utnyttja rotationen.[30] Det bör också påpekas att även om både drejskivor och hjul utnyttjade rotationen som princip så var skillnaden i friktionskrafter så stor att medan drejskivorna snurrade av sig själva så måste hjulen hållas igång!

Vi kommer senare att se att alla nya tillämpningar och vidareutvecklingar av hjulet kommer att följa på perioder då matematikerna fått nya insikter i cirkelns matematiska egenskaper. Det var därför förmodligen ingen tillfällighet att även den ursprungliga uppfinningen gjordes i den kultur där matematiken tidigast fick betydelse.

4. Från Sumer till Hellas

Sumererna hade invandrat i och erövrat södra Mesopotamien under senare delen av det fjärde årtusendet fvt, d.v.s. för något mer än 5000 år sedan. Ungefär samtidigt hade ett enat egyptiskt rike uppstått genom en sammanslagning av ett antal mindre riken. Dessa två riken förenades av ett område som brukar kallas *den bördiga nymånen* (engelska, the fertile crescent) och som sträcker sig från Egypten i sydväst, längs östra medelhavet, upp mot södra delen av nuvarande Turkiet och ner längs Eufrat och Tigris till deras gemensamma utlopp i Persiska viken. I två och ett halvt årtusende förblev detta område det högst utvecklade och tätast befolkade i världen. Under denna tid anlade sumererna bevattningsanläggningar som ända tills de förstördes av mongolerna efter erövringen av Bagdad år 1258 gjorde södra Mesopotamien till ett av världens rikaste och tätast befolkade områden. Det var under denna tid som Egyptens pyramider restes och det var då som bronset i vapen och redskap började ersättas av järn. Det var en tid av växt– och husdjursförädling

[30] Jag har tidigare påpekat att cirkeln förekommer i naturen och att levande varelser utnyttjat såväl cirkelns symmetriegenskaper som dess förmåga att innesluta en stor yta innanför en liten omkrets, men dessa egenskaper hos cirkeln är *statiska*. Det är ju också sant att jorden *roterar* runt sin axel och att månen roterar runt jorden men dessa rotationer beror på naturlagar och inte på levande varelser.

och av långsam teknisk utveckling. Det var också en tid när matematiken spreds från kultur till kultur och Pythagoras sats blev känd från Kina i öster till Egypten i väster. Sist men inte minst var det en tid av folkvandringar, en tid då riken uppstod och föll, en tid då kungarnas viktigaste rådgivare var astrologerna. och det var halva den tid som gått sedan den historiska tiden uppstod med skriften.

Sumerriket erövrades mot slutet av det tredje årtusendet fvt av grannfolk och övergick i det babyloniska. Även om dessa grannfolk talade semitiska språk, vilket fick stor betydelse för utvecklingen av skriften, så fortlevde det sumeriska språket och även matematiken i templen. Den matematik som bedrevs under denna tid, det må ha varit i Babylon eller Kina, Indien eller Egypten var empirisk och till för att fylla praktiska och religösa behov, dessa må sedan ha gällt administration, tideräkning eller stjärntydning.

Det var inte förrän en annorlunda kultur med friare och självständigare människor hade uppstått utanför de stora floddalarna som matematiken och därmed också det vetenskapliga tänkandet tog en ny vändning. Denna nya kultur var den grekiska.

5. *Thales och det matematiska beviset*

Under början av det sista årtusendet fvt hade grekerna etablerat sig som sjöfarare och handelsmän i nordöstra Medelhavet. Från sina städer på det grekiska fastlandet hade de lärt sig att utnyttja havet och öarna runt sig och när befolkningen ökade hade de kunnat etablera kolonier och grunda ny städer i ett område som sträckte sig från Sicilien i sydväst till Krim i nordost. Till skillnad från övriga samtida kulturfolk utgjorde deras städer vanligen självständiga stater. Dessa städer var dessutom demokratier i den meningen att alla *medborgare*[31] deltog i städernas styre. De viktigaste besluten fattades genom omröstning vid allmänna möten på torget (agoran). För att få igenom ett förslag måste man därför övertyga mötets deltagare om att det var ett bra och förnuftigt förslag. Detta ledde dels till att *det politiska talet* utvecklades till en egen konst, retoriken, dels till att förnuftiga argument ersatte spådomar och stjärntydning som grundval för de politiska besluten.

Den förste grek som blivit känd som matematiker och filosof var THALES (c:a 630 – 550 fvt) från Miletos. Staden Miletos låg i den del av det dåvarande Grekland som kallades Jonien och bestod av öarna i östra delen av Egeiska Havet och några enklaver på Mindre Asiens västkust.

Thales hade som köpman besökt Egypten och där lärt sig en del geometri. Enligt sentida efterföljare överträffade han snart sina läromästare och det påstods att han bl.a. använde sina kunskaper till uppmäta höjden av några pyramider med hjälp av likformiga trianglar. När han återvände till Miletos och försökte att lära sina landsmän geometri möttes han dock av tvivlare som var vana vid förnuftiga argument. För att övertyga dessa var han därför tvungen att uppfinna det geometriska beviset.

Begreppet *matematiskt bevis* har naturligtvis utvecklats under de årtusenden som passerat sedan Thales tid. Utgångspunkten är att ett bevis är till för att övertyga tvivlare. Professionella matematiker har i alla tider varit tvivlare. Därför har *ny* matematik alltid krävt bevis. Förutsättningen för ett bevis är dock att det finns någonting som "alla" är överens om och som kan tas till utgångspunkt för beviset. Eftersom Thales var först fanns det naturligtvis mycket lite som alla

[31] De var dock inte fullständiga demokratier i vår mening eftersom städernas befolkning förutom av medborgarna (som alla var män) dessutom bestod av kvinnor, invandrare (vanligen från omgivande landsbygd eller andra grekiska städer) och slavar.

kunde enas om och vi kan därför anta att de allra första geometriska bevisen utnyttjade enkla symmetrier. Detta antagande stöds också vid en genomgång av de geometriska satser som brukar tillskrivas honom såsom satsen att en diameter delar en cirkel mitt itu eller att basvinklarna i en likbent triangel är lika stora. En djupare sats som han också lär ha känt till, även om detta ibland betvivlas, är den sats som säger att periferivinkeln över en diameter är rät.

Thales fick elever och efterföljare som ägnade sig åt både naturfilosofi och geometri och efterhand uppstod det en livlig matematisk verksamhet i Miletos. Denna spreds till andra städer i Jonien och så småningom över hela Grekland. Under de första årtiondena var Miletos ett centrum för den grekiska filosofin men sedan perserna omkring år 500 fvt erövrat hela Mindre Asien (och därmed även Miletos) blev Greklands kommersiella centrum, Aten, också dess intellektuella.

6. Pythagoras och sfärernas harmoni

Ett annat område av nästan samma betydelse som Jonien var det som kallades Storgrekland ($'H\ \mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda\eta\ 'E\lambda\lambda\alpha\varsigma$ på grekiska och *Magna Græcia* på latin) och som bestod av Sicilien och de grekiska städerna i södra Italien. I detta område var Pythagoras den store inspiratören och läromästaren.

Pythagoras hade i sin ungdom varit elev till Thales men han hade sedan gjort egna resor och därigenom lärt sig babylonisk och antagligen också indisk matematik. Med sig från sina resor hade han ett helt filosofiskt system där matematiken och speciellt de naturliga talen spelade den centrala rollen. Att Pythagoras filosofi var matematisk innebar dock inte att den var enkel eller jordnära eller att den byggde på iakttagelser av naturen. Tvärtom var den i allra högsta grad mystisk och utgick ifrån föreställningar om de hela talens och de geometriska formernas inneboende egenskaper. Den var därför till dålig hjälp för ett studium av jordiska ting men den visade sig i gengäld ha sina fördelar vid studiet av de himmelska. Den idé som pythagoréerna hade och som sedan dess varit central för astronomin var att universum skall beskrivas *matematiskt*.

Den modell av världsalltet[32] som brukar kallas den pythagoreiska består av en central eld i universums mitt, runt den cirklar 9 himlakroppar och allra längst ut finns fixstjärnesfären som även den roterar runt centralelden. Himlakropparna är jorden och motjorden (mer om den nedan), solen och månen, samt de fem då kända planeterna, Merkurius, Venus, Mars, Jupiter och Saturnus. De är alla perfekta klot liksom fixstjärnesfären är en perfekt sfär. Även om vissa inslag i pythagoréernas modell förmodligen var deras eget påfund är det anmärkningsvärt hur nära den anknyter till orientaliska skapelsemyter. Det finns därför anledning att anta att Pythagoras ursprungliga föreställning om världsalltet hade hämtats ur en babylonisk (eller möjligen indisk) mytologi, som i sin tur hade uppstått ur den viktigaste av alla religösa riter, nämligen den urgamla skapelseriten. Eftersom vi redan berört denna rit i samband med räknandets uppkomst kan det vara dags att antyda hur den ursprungligen kan ha tillgått.

> *Mitt på den stora arenan brann en kraftig eld. Innanför eldens ljuscirkel fanns intet att se och utanför härskade mörkret. Sedan skapades världen, först skaparen själv som uppstod ur intet och sedan hans maka. Tillsammans skapade de gudar och människor genom att kalla fram dem till ljuset. Två och två, man och kvinna, man och kvinna kallades fram och fick liv. De skapade också berg och floder, träd och buskar, örter och gräs — hans skapelser blev manliga och hennes kvinnliga. Vid skapelsen räknades varelsernas antal och namnen blev tal och talen blev namn. De udda talen blev manliga och de jämna kvinnliga.*

[32]Det grekiska ordet var Kosmos ($K o\sigma\mu o\varsigma$)

En som hade en stor tilltro till riternas betydelse var antropologen och matematikhistorikern A. Seidenberg, som framfört teorin att själva räknandet har sitt ursprung i skapelseriten och att det mesta av den talmystik som förekommer i världen kan härledas till de varelser som representerades av givna tal. Även den uppdelning av världen i manligt och kvinnligt som finns i många språk (även om den i stort sett gått förlorad i svenskan och engelskan) kan enligt denna teori återföras till en skapelserit där en manlig och en kvinnlig gud skapar världen tillsammans. Enligt Seidenbergs teori var skapelseriten av betydelse inte bara för uppkomsten av *räknandet* och därmed *aritmetiken* utan även för *geometrin*. I riten var arenan en cirkel och de skapade varelserna rörde sig i cirklar runt elden och skaparen, rörelsen var alltid medsols och de första gudar som skapades förknippades med planeter och stjärnor som rörde sig på himlavalvet. Genom skapelseriten blev cirkeln helig, och rörelsen medsols blev lyckobringande — samtidigt vandrade allt som skulle offras motsols runt elden. Denna rörelse blev därför farlig och olycksbådande och kom att förknippas med undergång och död.

Den mest anmärkningsvärda beröringspunkten mellan pythagoréernas kosmologi och denna skapelserit var naturligtvis förekomsten av en centraleld, men även idén om att planeterna rör sig i cirkulära banor runt denna eld är värd att notera.

Det som däremot knappast kan ha ingått i en skapelserit är föreställningen om att himlakropparna är perfekta klot utan denna föreställning har antingen tillkommit redan i Babylonien (eller Indien) eller så kan den vara pythagoréernas eget bidrag. Oavsett hur idén uppkommit så är pythagoréernas motivering till den intressant. Anledningen var att klotet är den perfekta formen och i en fulländad (gudomlig) värld måste därför himlakropparna vara klot. Av samma anledning måste också deras banor vara cirklar. En speciell egenhet i deras modell var förekomsten av en *motjord* som berodde på att 10 var det perfekta talet och därför också måste vara himlakropparnas antal. Eftersom de bara kunde se sju rörliga himlakroppar och dessa tillsammans med fixstjärnesfären och jorden själv fortfarande bara var 9 så antog de att det fanns en tionde som inte kunde ses från jorden. Det var denna som kallades motjorden och anledningen till att den inte kunde ses från jorden var att den alltid befann sig mellan elden och jorden. Det är också värt att nämna att pythagoréerna antog att jorden alltid vände samma sida mot elden, och att denna sida var så het att den var obeboelig. Det bör samtidigt påpekas att enligt deras modell så lyste inte bara månen och planeterna utan även solen med lånat ljus. Det bör också påpekas att även om pythagoréernas ursprungliga modell snart övergavs och ersattes med andra, där jorden så småningom hamnade i universums mitt, så fanns föreställningen att jorden och planeterna var perfekta klot kvar i alla dessa modeller, och speciellt kan uppfattningen om att jorden var rund sägas ha varit etablerad i den lärda världen sedan dess.

Till sist är det värt att nämna ännu ett inslag i pythagoréernas modell för världsalltet, nämligen idén om *Sfärernas harmoni*. Denna hade förmodligen ett delvis rituellt ursprung i det att de varelser som skapades vid riten alla sjöng eller spelade sin egen ton eller melodi. Till denna ursprungliga idé kopplade sedan pythagoréerna sin upptäckt av de hela talens betydelse för harmonierna. Visserligen fanns det inga strängar att spela på men istället föreställde de sig att ju fortare kropparna rörde sig ju högre var tonen. Därför måste förhållandet mellan planeternas hastigheter ges av hela tal och eftersom de antog att de rörde sig fortare ju längre bort de befann sig fanns det också matematiska samband mellan radierna i deras banor. Och någonstans i Kosmos satt Gud och lyssnade till den sfärernas harmoni som hans fulländade verk åstadkom.

7. De klassiska problemen

Även om cirkeln sedan pythagoréernas tid fått en betydligt större teknisk betydelse så har den förmodligen aldrig haft en större makt över sinnena än hos dem.[33] Jag ska senare (se sid) återkomma till och kanske ge en förklaring till på vilket sätt klotet kan anses vara den *perfekta* formen. Detta hör dock hemma i ett helt annat kapitel och här ska jag i stället följa cirkelns vidare öden i grekisk geometri och filosofi.

Det som till stor del tycks ha varit drivkraften för den grekiska geometrin var försöken att lösa de tre problem som blivit kända som ”de klassiska”. Dessa var *cirkelns kvadratur, kubens fördubbling* och *vinkelns tredelning*. I problemet om cirkelns kvadratur gällde det att konstruera en kvadrat med samma yta som en given cirkel, kubens fördubbling handlade om att konstruera en kub vars volym var dubbelt så stor som en given kubs, medan vinkelns tredelning handlade om att dela en given vinkel i tre lika stora delar. (Det bör i detta sammanhang påpekas att man tidigt lärde sig att dela en vinkel i *två* lika stora delar och en sträcka i ett godtyckligt antal lika delar.)

Även om inget av de klassiska problemen fick en helt tillfredsställande lösning under antiken så ledde studiet av dem till en storartad utveckling av den grekiska geometrin. Det för vårt vidkommande viktigaste av problemen var naturligtvis cirkelns kvadratur, men även vinkelns tredelning gav upphov till viktiga insikter och satser om cirklar och cirkelbågar.

De mest kända av 400-talets grekiska matematiker var Demokritos från Abdera och Hippokrates från Khios.[34] Demokritos har främst gått till eftervärlden som den antika atomteorins förgrundsgestalt men han var också en skicklig matematiker. Även om han inte gav något direkt bidrag till problemet om cirkelns kvadratur så studerade han besläktade problem. En av hans mest berömda satser var en beräkning av volymen av en cirkulär kon. Det resultat han fick var inte att volymen hade ett visst värde, något som det vid denna tid inte gick att påstå eftersom svaret inte skulle ha kunnat uttryckas med hjälp av naturliga tal, utan istället att volymen av konen var en tredjedel av volymen hos en omskriven cylinder. Denna sats spelade stor roll för utvecklingen av atomteorin och den har också intresserat senare tiders matematikhistoriker eftersom han härledde satsen genom att tänka på det sätt som långt senare skulle leda fram till integralkalkylen. Hippokrates kan däremot sägas ha givit ett verkligt bidrag till kvadratur-problemet. Den situation som rådde då Hippokrates började studera problemet var att man trots långvariga och energiska försök inte hade på något sätt kommit lösningen närmare. Det hade t.o.m. gått så långt att man började tvivla på om det överhuvudtaget var möjligt att hitta en figur som omgavs av cirkelbågar och vars yta var lika stor som ytan av en figur omgiven av raka linjer. Det Hippokrates lyckades med var att bevisa att den sammanlagda ytan av de två månarna nedan var lika stor som ytan av triangeln.[35]

8. Platon och idéläran

I dagens av vetenskapen präglade värld är det svårt att förstå vilken betydelse som geometrin och matematiken hade i grekernas föreställningsvärld. I dag är det så mycket som vi vet (och kanske ännu mer som vi tror oss veta). Då var geometrin den enda kunskap som föreföll säker och den var därför den självklara förebilden

---

[33]Möjligen kan det däremot sägas att den betydelse som cirkeln fick i Platons tänkande fick ännu större konsekvenser för världens kommande öden. Se avsnitt 8 nedan.

[34]Hippokrates från Khios bör inte förväxlas med sin namne den ännu mer berömde läkaren Hippokrates från *Kos*.

[35]Se appendix N

för all vetenskaplig verksamhet. En av de många filosofer som inspirerades av geometrin var Platon. Han hade varit lärjunge till Sokrates och när denne avrättades år 399 fvt så rämnade hans värld. I sorg och vredesmod lämnade han Aten och gick i en frivillig landsflykt som varade i 10 år. Under dessa år kämpade han för att återfå tron på en rättvis värld där godheten belönades och synden straffades. De problem som Platon kämpade med var moraliska. Hans läromästare hade hävdat att den som hade en riktig kunskap om det rätta också skulle leva på ett riktigt sätt. Samtidigt fanns det i den grekiska filosofin en stark tradition av kunskapskritik som gick tillbaka till två 500-talsfilosofer, nämligen Herakleitos från Efesos (i Jonien) och Parmenides från Elea (i Magna Græcia). Enligt Herakleitos var säker kunskap om världen omöjlig därför att säker kunskap måste vara *oföränderlig* medan världen alltid förändrades. Enligt Parmenides var kunskap om *sinnevärlden* omöjlig därför att våra sinnen alltid(!) bedrog oss. Platon hade innan han lärde känna Sokrates haft en lärare som tillhörde den herakleitiska skolan och han hade accepterat dennes åsikter. Platon befann sig därför i en omöjlig situation i det att säker kunskap var både nödvändig (enligt Sokrates) och omöjlig (enligt Herakleitos och Parmenides). För att lösa problemet började han med att söka säker kunskap. Denna fann han, som andra tänkare gjort både tidigare och senare, i matematiken. Hos pythagoréerna i Tarent gav geometrin den absoluta och sanna kunskapen. Men deras sanna kunskap gällde bara för geometrin. Hur kunde han därifrån få säker kunskap i moraliska frågor?

Platons svar blev den berömda *Iduläran*. Utgångspunkten för denna var en viktig egenskap hos geometrin som Platon hade noterat. Poängen var att kunskapskritiken gällde företeelser i den föränderliga fysiska världen och Platon upptäckte att geometrin inte handlade om denna. Geometriska satser om cirklar handlade inte om cirklar i sinnevärlden utan om *perfekta* cirklar som inte kunde ritas. Platon beskrev det så att det var cirkelns idé som de handlade om. Från cirkelns idé var steget kort till andra geometriska begrepp och därifrån tog han sedan det halsbrytande språnget till föreställningen att även moraliska begrepp hörde hemma i denna värld av idéer. Med idéläran som lösning på sina filosofiska och moraliska problem så återvände han till Aten och grundade en skola. Denna skola som kallades Akademin eftersom den låg i kvarteret Akademeia bestod i 900 år och hade speciellt under de 40 år som Platon själv ledde den en oerhörd betydelse för grekisk filosofi och matematik. Platons betydelse för den intellektuella utvecklingen under antiken kan knappast överskattas och det är knappast ens en överdrift att påstå att t.o.m. Gud skapades ur cirkelns idé.[36]

9. Akademin

Akademin blev på kort tid känd över hela det dåtida Grekland och de flesta av tidens förnämsta matematiker och vetenskapsmän var under längre eller kortare tid verksamma där. Så länge han levde var Platon själv den givne ledaren för verksamheten. Han utarbetade också ett forskningsprogram som till att börja med innebar ett studium av matematik, främst geometri och astronomi. När hans idélära utvecklats vidare tillkom så småningom även ett studium av företeelser i

[36] Även om vi vanligen tror att läran om en enda Gud kommer från Judendomen, så är detta inte helt sant. Det bör nämligen observeras att det första budet inte utsäger att det bara finns en Gud, utan bara att en jude inte fick *tillbe* någon annan Gud än Jahve. Hade det inte funnits andra gudar skulle detta bud naturligtvis ha varit fullständigt onödigt. Idén om att judarnas gud, Jahve, var den enda guden uppkom istället under grekiskt inflytande bland judarna i Alexandria och kan närmast ses som ett sätt att ge ett namn åt *det godas idé* som var den högsta av idéerna i Platons idévärld.

sinnevärlden. De som utförde viktiga delar av Platons program var tidens främste astronom Eudoxus från Knidos (c. 408 – c. 355 fvt) (som också var en framstående och nyskapande matematiker) och Aristoteles (384 – 322 fvt).

Ett av de centrala problemen i programmet gällde "sfärernas harmoni", d.v.s. astronomin. Vid det här laget hade den gamla modellen med en centraleld som allt snurrade runt övergivits och man föreställde sig i stället en rund jord i "världens mitt". Runt denna snurrade solen, månen och fixstjärnorna i regelbundna cirklar. Men förutom dessa fanns också "himmelens luffare", planeterna[37], som tycktes irra hit och dit och kors och tvärs över himlen. Trogen sina pythagoreiska ideal förutsatte Platon att även dessa följde banor som kunde beskrivas med perfekta cirklar.

Problemet fick en för sin tid tillfredsställande lösning av Eudoxus. Utgångspunkten för Eudoxus beskrivning var antagandet att fixstjärnorna befinner sig på en stor sfär som roterar runt en axel (genom jordens poler) ett varv per dygn. Alla himlakroppar befinner sig mellan den orörliga jorden och den roterande fixstjärnesfären. Med denna rör sig alla himmelska kroppar, men solen, månen och planeterna har dessutom egna sfärer som roterar i förhållande till den yttersta sfären. Den viktigaste rotationsaxeln är vinkelrät mot (och förklarar därmed) ekliptikan — den som vi numera helt enkelt förklarar med att jordaxeln lutar mot jordens bana runt solen. Solens sfär roterar alltså ett varv per år medan de övriga planeternas sfärer roterar ett varv per planetår. Dessutom behövde planeterna ytterligare sfärer som roterade med andra hastigheter — allt som allt behövde Eudoxus ett trettiotal sfärer som alla roterade med konstant hastighet. Därigenom beskrevs planeternas rörelser, såsom Platon hade önskat, med hjälp av perfekta cirkelrörelser.

Eudoxos var också en framstående matematiker som bl.a. gav ett viktigt bidrag till kvadraturproblemet. En elev till Eudoxos som också tidvis var verksam vid Akademin var Menaechmos vars viktigaste matematiska insats var upptäckten av *kägelsnitten*, ellipsen, parabeln och hyperbeln. Han var också tillsammans med Aristoteles lärare till den kungason av Makedonien som senare skulle gå till historien som Alexander den store.

10. Aristoteles

Även om Platons stora intresse för geometrin verksamt bidrog till att den studerades livligt vid Akademin så var hans inflytande ändå inte enbart positivt. Anledningen till detta var att han såg geometrin som en del av idéläran, vilket innebar att det var de rena idéerna som skulle studeras. En följd av detta blev att han ställde så stränga krav på problemställningar och metoder att de i längden blev hämmande för utvecklingen. Ännu mer hämmande blev idélärans inflytande för naturfilosofin, d.v.s. den dåtida naturvetenskapen. Detta ledde till att Akademins jämte Platon främste filosof, Aristoteles, kom att alltmer ta avstånd ifrån den. Även om Aristoteles av tillgivenhet för sin lärare stannade vid Akademin ända till Platons död år 347 fvt, så lämnade han den omedelbart därefter.

Aristoteles har liksom Platon gått till historien som filosof och inte som matematiker, även om han till skillnad från Platon faktiskt lär ha bevisat några egna geometriska satser. Som filosof skapade han ett genomtänkt system som när det under 1200-talet nådde Europa skakade kristenheten i dess grundvalar. Även om den kristna kyrkans stora filosof, Thomas av Aquino lyckades skapa ett nytt system som i sig innehöll såväl kristendomen som Aristoteles filosofi, så blev resul-

[37] Ordet planet är släkt med ordet flanera och betyder på grekiska "vandrare".

tatet ändå att det rationella tänkandet fick den roll i Europa som i sin förlängning ledde till renässansen och den vetenskapliga revolutionen.

Det mesta av Aristoteles verksamhet faller utanför ramen för denna bok, men det ändå värt att nämna en av hans böcker, nämligen den som brukar kallas Aristoteles *Fysik*. I denna omarbetar han Eudoxos modell för universum inte bara genom att lägga till fler sfärer för att på detta sätt få bättre överensstämmelse med observationerna, utan framför allt genom att göra dem materiella. Medan Eudoxos arbetade i en *matematisk modell* så gjorde Aristoteles en fysisk. Detta bör ha ökat intresset för de mer komplicerade mekaniska system som senare konstruerades av bl.a. Arkimedes. Boken innehåller också en teori för *rörelse* som även om den i efterhand har utdömts som totalt felaktig ändå gav en någorlunda adekvat beskrivning av de fysikaliska system som då var viktiga.[38]

Även om Aristoteles förvisso påverkat historien genom sin filosofi så är det möjligt att det inflytande han som lärare hade för Alexander av Makedonien var av ännu större betydelse. Aristoteles kom till det makedoniska hovet år 342 fvt när Alexander var 14 och blev kvar där i sex år. När Alexander, efter att fadern mördats, blev kung av Makedonien var han väl förberedd för sin uppgift. Han hade undervisats av tidens främsta lärare och fått lära sig allt vad en kung behövde kunna. Geometri hade han lärt av Menaechmos, statskonst av Aristoteles, och sist men inte minst så hade han på slagfältet lärt sig krigskonst av sin far Filip II. Två år efter sitt trontillträde hade han säkrat sin maktställning och var därmed färdig att inleda ett krigståg i österled som på 11 år omskapade världen. Vid sin död år 323 var han härskare över ett rike som sträckte sig från Indus i öster till Egypten och Grekland i väster. Även om det efter hans död delades mellan tre av hans generaler så blev den grekiska kulturen dominerande i hela riket i mer än ett halvt årtusende.

[38] Se appendix A.

11. Alexandria och Museion

Efter Alexanders död lyckades en av hans generaler, Ptolemaios (tillika Alexanders historieskrivare), etablera sig som härskare i Egypten under namnet Ptolemaios den förste. Han blev därmed den förste i en dynasti som kom att regera i Egypten ända tills ättens sista regent, drottningen Kleopatra, efter Julius Cæsars död så småningom tog sitt liv år 31 f.Kr. Eftersom alla hans ättlingar också kallade sig Ptolemaios brukar dynastin kallas för den ptolemaiska. Som sin huvudstad valde ptolemaierna den av Alexander nyanlagda staden Alexandria.

Alexandria hade anlagts på en ö väster om Nilens utlopp i Medelhavet och genom sitt gynnsama läge i skärningspunkten för tre världsdelar så blev staden snart ett centrum för världshandeln. För ptolemaierna var detta dock inte nog, utan de ville att staden i alla avseenden, även intellektuellt och konstnärligt, skulle vara världens huvudstad. På central plats i staden uppförde de därför en ståtlig byggnad dit vetenskapsmän från ”hela världen” inbjöds. Byggnaden fick namnet Museion eftersom muserna i grekisk mytologi var konsternas beskyddare. Museion blev den antika vetenskapens obestridliga centrum. Alla betydande vetenskapsmän var antingen verksamma där eller uppehöll en nära kontakt. Under hela den ptolemaiska tiden blomstrade den alexandrinska vetenskapen och i det tillhörande biblioteket samlades allt fler skrifter och allt mer av tidens vetande. Den tidens skrifter skrevs på rullar gjorda av papyrus och som mest innehöll biblioteket över en halv miljon rullar. Biblioteket i Alexandria var den rikaste skattkammare som världen skådat. Där fanns mer av grekisk kultur än i alla grekiska tempel tillsammans, mer av egyptisk storhet än i pyramiderna och mer av orientalisk visdom än i Babylon.

Det fanns fyra avdelningar inom Museion — litteratur, matematik, astronomi och medicin. Inom alla dessa områden nådde den alexandrinska vetenskapen fram till en kunskapsnivå som inte överträffades förrän under den vetenskapliga revolutionen i Europa. Avdelningen för litteratur kan närmast jämföras med den humanistiska fakulteten vid dagens universitet. Man studerade den grekiska kulturen och det grekiska språket i alla dess former och yttringar. Detta innebar dels ett studium av litterära verk, dels att man vidareutvecklade studiet av språkets *grammatik*. Den äldsta bevarade grammatiken är från omkring år 100 f.Kr.

Om avdelningen för litteratur motsvarade en humanistisk fakultet, så var avdelningen för matematik närmast att likna vid en teknisk högskola. I detta sammanhang bör det påpekas att medan vi idag anser (eller möjligen t.o.m. inser) att förutsättningen för matematikens användbarhet är att den i sig inte har med verkligheten att göra, så trodde man vid denna tid, och i själva verket ända fram till mitten av det förra århundradet att matematiken i sig var en del av den fysiska verkligheten.[39] Det var därför naturligt att man tillsammans med matematiken studerade alla de fysikaliska problem som på ett eller annat sätt kunde beskrivas med den tidens matematik. Dessa innefattade lantmäteri (d.v.s. den ursprungliga geometrin), byggnadskonst och statik, optik med perspektivlära, hydrostatik och hydrodynamik (d.v.s. studiet av de fysikaliska egenskaperna hos stående och rinnande vatten), samt i viss utsträckning även rörelselära.

Avdelningen för astronomi var nära knuten till avdelningen för matematik.

[39]Efter upptäckten av icke-euklidisk geometri och och den därpå följande insikten om att verkligheten inte kan vara både euklidisk och icke-euklidisk insåg man att matematikerna tydligen kan studera företeelser som inte beror av den fysiska verkligheten. Den överraskande konsekvensen av Einsteins relativitetsteori var dessutom att det var den i två och ett halvt årtusende allenarådande euklidiska geometrin som inte beskrev det fysiska rummet.

Det var t.o.m. så att den matematik som utvecklades för studiet av astronomin, nämligen trigonometrin, var den alexandrinska vetenskapens viktigaste bidrag till matematiken. I övrigt ägnade man sig dels åt praktisk astronomi, d.v.s. ett tålmodigt observerande av stjärnor och planeter, dels åt att vidareutveckla de matematiska modellerna för planetsystemet och kosmos. Förutsättningen för det teoretiska arbetet var dels egna observationer som genom förbättringar av de astronomiska instrumenten var noggrannare än alla tidigare, dels mångfhundraåriga observationer från Grekland och framför allt Babylonien.

12. Cirkeln mäter världen

Även om idélärans inflytande över matematiken avtog när Alexandria blev vetenskapens nya centrum så rubbade detta inte cirkelns betydelse. Tvärtom tycks denna snarare ha ökat eftersom matematikerna blev allt skickligare i att använda sina geometriska kunskaper till att beskriva världen omkring sig, samtidigt som ingenjörerna lärde sig att tänka matematiskt vid lösningen av praktiska problem.

Den alexandrinska epoken inleddes med att EUKLIDES i sin *Elementa* sammanfattade och systematiserade sin tids matematiska kunskaper. Elementa gjorde inte bara nästan alla tidigare matematiska arbeten överflödiga, vilket säkert bidrog till att dessa upphörde att kopieras och därmed (tyvärr) oftast försvunnit, utan blev också alla tiders mest framgångsrika lärobok.

Elementa skrevs omkring år 300 fvt och följdes av en period av intensiv vetenskaplig aktivitet i Alexandria. Ledare för verksamheten var bibliotekarien vid Museion som under en period under 200-talet fvt var ERATHOSTENES (c:a 280 – 195 fvt) känd som antikens lärdaste man. Han var berömd som matematiker, poet, filosof, filolog och historiker. Hans främsta insats som matematiker var den metod att hitta primtal som blivit känd under namnet Erathostenes såll.[40] För eftervärlden är han dock mest känd som geograf och speciellt berömd blev han för sin uppskattning av jordens omkrets. Utgångspunkten för hans beräkning var den berömda brunnen i Syene (nuvarande Assuan), en djup brunn där solljuset en gång om året nådde ända ner i botten. Detta hände alltså när solen på midsommarafton stod i zenit. Erathostenes trodde att Alexandria låg rakt norr om Syene och att avståndet mellan de två städerna var 5000 stadier. Han uppmätte därför solhöjden även i Alexandria vid samma tidpunkt och uppskattade att den avvek med 1/50 av ett helt varv. Eftersom han liksom alla samtidens lärde antog att jorden var ett perfekt klot så kunde han dra slutsatsen att jordens omkrets var 250 000 stadier. Eftersom det finns olika uppgifter om hur långa stadier Erathostenes använde så är det svårt att bedöma hur god hans uppskattning var. Som regel var dock en stadion mellan 160 och 170 meter vilket innebär att en kvarts million stadier skulle bli mellan 4000 och 4250 mil och det är ju faktiskt inte så dåligt.

Två något äldre samtida med Erathostenes var astronomen ARISTARKOS från Samos (c:a 310 – 230 fvt) och antikens främste matematiker Arkimedes (c:a 287 – 212 fvt). Liksom för de flesta av dåtidens vetenskapsmän, eller som de ibland kallas *naturfilosofer*, så utgjorde Euklides Elementa grunden för deras världsuppfattning, och förutsättningen för alla matematiska beskrivningar av världen.

Aristarkos är mest känd för sitt arbete *Om solens och månens avstånd och storlek*, ett arbete som förlänat honom benämningen antikens Kopernikus. Detta arbete är ett av de tidigaste exemplen på alexandrinernas intresse för kvantitativa beskrivningar av världen, samtidigt som det visar att såväl den tillgängliga astronomiska tekniken som de matematiska begreppen ännu är otillräckliga. De matematiska

[40] Se appendix P

och fysiska modeller för universum som Eudoxus och Aristoteles skapat var kvalitativa. De hade en teori om ordningen mellan de roterande sfärerna men de hade inte försökt att beskriva storleken av dem. Eftersom det förutsattes att månen och solen var de himlakroppar som låg närmast jorden föresatte sig Aristarkos att beräkna avstånden till dessa. På köpet fick han en uppskattning av deras storlekar både i förhållande till varandra och till jorden.

De resultat han fick var förbluffande. Genom en grov felmätning kom han fram till att solen låg ungefär 19 gånger så långt från jorden som månen gjorde och att dess diameter var 19/3 av jordens. Detta innebar att dess volym var ungefär 250 gånger jordens. Tidigare astronomer hade nog anat att solen var större än den såg ut och de djärvaste påstod att solen kunde vara större än Peloponnesos. Men att den var så stor hade ingen anat. Den fråga Aristarkos ställde sig efter dessa beräkningar var den självklara, nämligen *Varför skulle denna väldiga hinlakropp rotera runt den ynkliga jorden?* och det svar han gav var lika självklart *Det gör den inte.* Istället drog han alltså slutsatsen att jorden roterade runt solen.

Boken vållade en enorm uppståndelse i den lärda världen och Aristarkos teorier bemöttes genast med häftiga invändningar. Invändningarna var såväl vetenskapliga som religiösa. De vetenskapliga argumenten grundades på Aristoteles fysik, som lärde att tunga kroppar sökte sig mot universums centrum som också antogs vara jordens. Om jorden rörde sig, hur skulle de då veta vart de skulle söka sig. Man antog också att molnen skulle bli efter och släpa som en kometsvans efter jorden. Värre för Aristarkos var dock anklagelserna för ogudaktighet. Även dessa anklagelser grundades delvis på Aristoteles fysik, såtillvida som att det ogudaktiga bestod i att han genom att göra jorden till en himlakropp bland andra besudlade de perfekta och eviga himmelska sfärerna med jordens ofullkomlighet och förgänglighet. Inflytelserika filosofer i Aten ansåg att han borde ställas inför rätta och under en tid tycks hotet ha varit överhängande. Ett resultat av oppositionen blev att ingen av de antika astronomerna vågade stödja honom, och Aristarkos heliocentriska teori förblev en kuriositet ända tills Kopernikus mer än 1700 år senare återuppväckte den. Idag vet vi att Aristarkos hade rätt, trots att han grovt underskattade avståndet till solen. Som vi idag vet är ju solens avstånd till jorden mer än hundra gånger månens och dess volym mer än två miljoner gånger jordens.

13. Arkimedes mäter cirkeln

Bland antikens matematiker och vetenskapsmän intar Arkimedes (c:a 287 – 212 fvt) en särställning. Detta inte bara därför att han i sitt tänkande som matematiker och matematisk fysiker låg nästan två årtusenden före sin samtid, utan också för att han redan under sin livstid kom att personifiera det världsfrånvända geniet. Han föddes och dog i den då grekiska staden Syrakusa på Sicilen, och även om han förmodligen fick sin utbildning i Alexandria, så levde han större delen av sitt liv i födelsestaden.

Arkimedes är idag mest känd genom de anekdoter som berättades om honom och för sina arbeten i teoretisk fysik. Jag kommer dock i detta avsnitt att huvudsakligen berätta om de av hans insatser som visar hans kännedom och förståelse för cirkeln, sfären och rotationen. Eftersom astronomin vid denna tid sågs som ett studium av (de himmelska) sfärerna kan det därför vara naturligt att börja med hans enda kända (men tyvärr förkomna) astronomiska verk.

Hans far hade varit hovastronom och kanske var det detta som inspirerade honom att redan som ung tillverka ett *planetarium,* d.v.s. en rent mekanisk modell för solsystemet och stjärnhimlen. Han beskrev sin modell i en skrift som fick namnet *Om tillverkning av sfärer,* som dock liksom planetariet självt försvann under antiken. Det enda som idag återstår är därför beskrivningar av något yngre romerska författare. Av dessa framgår att en betraktare genom att vrida på en vev kunde få solen, månen och planeterna att följa sina kända banor över himlavalvet. Det finns också beskrivningar som påstår att det drevs av vattenkraft. Även om den sista uppgiften är tvivelaktig så är det uppenbart att konstruktionen var ett finmekaniskt precisionsarbete. Det är dessutom uppenbart att han var helt förtrogen med sin tids astronomiska teorier. Det bör också påpekas att planetariet var tillverkat av brons och att det måste ha utnyttjat den då ännu ganska nya idén att använda kugghjul för att överföra vridningen från veven till de olika sfärer som bar upp planeterna.[41]

Det finns en annan berömd antik uppfinning som också utnyttjar rotationer och kugghjul, men som inte tidigare förknippats med Arkimedes, nämligen den hodometer, eller vägmätare, som beskrevs av den romerske arkitekten Vitruvius. Idén, som naturligtvis är enkel, är att mäta en vägsträcka genom att rulla ett hjul längs vägen och räkna antalet varv, men konstruktionen är inte lika lätt. Svårigheten bestod nämligen i att få räkningen av antalet varv att ske automatiskt. Det har dock nyligen föreslagits (av André W. Sleeswyk[42]) att även denna i själva verket är en av Arkimedes' uppfinningar. Sleeswyks främsta argument för sin hypotes är att konstruktionen innehåller en teknisk detalj som visserligen var vanlig under medeltiden men som under antiken endast hade använts av Arkimedes. Detta är naturligtvis inget avgörande bevis, så för att öka trovärdigheten så anför Sleeswyk ytterligare några argument. Ett av dessa är att romarna när de började sätta upp milstolpar längs alla sina huvudvägar helt enkelt vände sig till Arkimedes för att få hjälp med sina mätningar. Detta arbete inleddes omkring år 260 fvt och eftersom staden Syrakusa vid denna tid var allierad med Rom (i krigen mot Kartago) så bör det ha varit naturligt för romarna att be den redan då berömde Arkimedes om hjälp.[43]

Sleeswyk anför ytterligare argument och ett av dessa ska jag återkomma till i samband med en beskrivning av några av Arkimedes matematiska arbeten. Här ska jag emellertid fortsätta med att beskriva ytterligare några av hans uppfinningar. Det är därvid värt att påpeka att även om Arkimedes under antiken var berömd som ingenjör så är det bara en av hans uppfinningar som i alla tider förknippats med honom, nämligen den s.k. Arkimedes' skruv. För att förstå denna kan det dock vara idé att sätta in den i ett större sammanhang, och vi kan därför utgå ifrån ett av hans mest berömda uttalanden, nämligen: *"Ge mig en fast punkt och jag skall flytta hela jorden".*

Bakgrunden till detta uttalande var att Arkimedes bättre än någon före honom hade förstått den allmänna hävstångslagen, både teoretiskt och praktiskt. Att han förstod lagen teoretiskt visade han i ett flertal skrifter som behandlade hävstänger och jämvikt. Några av dessa är försvunna medan andra såsom *Om plana ytors jämvikt* eller *Om flytande kroppar* bevarats till våra dagar. Att han också förstod att utnyttja den praktiskt framgår dels av hans uppfinningar och dels av samtida berättelser om hans bravader. Den mest kända av dessa är den om hur han sittande bekvämt lutad mot ett träd egenhändigt drog ett fullastat skepp ner till stranden

[41] En intressant och lättläst beskrivning av Arkimedes betydelse för utvecklingen av kugghjulet finns i Örjan Wikanders uppsats *Vägmätare, vattenmöllor och astronomiska instrument. Om kuggjulets äldsta historia* i **D**.

[42] Se t.ex. "Vitruvius 'odometer", Scientific American 245, 1981, no 4, sid 158-171.

[43] Den dåvarande kungen i Syrakusa var Hieron (306 – 215 fvt) som år 261 under det första *puniska kriget* (mot Kartago) slöt förbund med Rom och därefter under sina återstående 36 år vid makten också var en trogen allierad. Det var inte förrän efter Hierons död som staden i samband med Hannibals inledande framgångar i norra Italien bytte sida.

och ut i vattnet genom att lugnt dra i ett lätt rep[44].

För att förklara både denna historia och samtidigt antyda hur skruven kommer in i bilden kan det vara lämpligt att ge en kvantitativ och mycket allmän formulering av hävstångslagen genom formeln

$$arbete = kraft \cdot väg.$$

Den viktigaste konsekvensen av denna formel är att det går att utföra ett stort arbete med en liten kraft, förutsatt att ”man är beredd att gå långt”. Eftersom det samtidigt gällar att inte komma för långt bort så bör man helst gå i cirklar. Kombinerar vi dessa två idéer så ser vi att ett enkelt sätt att göra det är att använda en vinsch, vilket innebär att vi använder ett stort handtag för att rulla upp ett rep på en smal axel. Denna teknik var förmodligen gammal redan på Arkimedes tid, men han förbättrade den bl.a.genom att helt enkelt använda samma idé två gånger. Han gick också vidare i sitt tänkande och sina konstruktioner för att lösa andra problem. Det är ju nämligen ofta så att vi kanske kan åstadkomma en stor kraft men om denna är riktad åt fel håll eller angriper på fel ställe så är den till ringa nytta. Det vi kan åstadkomma med en vinsch är nu en kraft som är riktad vinkelrätt mot rotationsaxeln och det problem som Arkimedes tycks ha ställt sig var hur han skulle kunna åstadkomma en kraft som var riktad parallellt med rotationsaxeln. Lösningen på detta problem blev *skruven,* eller som den ibland kallas, den *ändlösa skruven.* På Arkimedes tid användes denna bl.a. för att tillverka oljepressar och numera används den t.ex. i domkrafter och skruvtvingar. Något senare insåg han också att han kunde använda skruven för att lyfta vatten.

Efter dessa exempel på hans förmåga att praktiskt utnyttja rotationer, kan det vara på sin plats att också säga något om hans teoretiska kunskaper om cirkeln. Det kan därvid vara idé att börja med ett av hans tidigare arbeten, nämligen det som kallas *Om mätning av cirkeln.* Detta kan sägas ha varit så nära man kom under antiken till att lösa problemet om cirkelns kvadratur, d.v.s. problemet att ”geometriskt konstruera” en kvadrat med samma yta som en given cirkel. Eftersom problemet i denna form är olösbart så kunde naturligtvis inte heller Arkimedes lösa det, men det han istället gjorde var att *bevisa* att cirkelns yta är lika stor som ytan av en triangel med cirkelns omkrets som bas, och dess radie som höjd. Han *bevisade* också att förhållandet mellan cirkelns omkrets och dess diameter låg mellan $3\frac{10}{71}$ och $3\frac{1}{7}$. En intressant poäng med detta arbete är att det tycks ha skrivits ungefär samtidigt som han skulle ha konstruerat hodometern, något som Sleeswyk också använder som ett argument för sin hypotes. Om det finns ett sådant samband så belyser detta på ett något oväntat sätt Arkimedes förmåga att kombinera praktiskt och teoretiskt arbete. Saken är den att enligt Vitruvius beskrivning så skall hodometerhjulet ha rullat exakt 400 varv på en romersk mil och eftersom en mil var 5000 fot så skulle hjulet ha haft en omkrets av $12\frac{1}{2}$ fot. Det lättaste sättet att åstadkomma ett hjul med denna omkrets var naturligtvis att först tillverka det något större och sedan slipa ner det så att omkretsen blev exakt vad den skulle vara, och eftersom alla hans arbeten tydligt visar hur praktisk han var så finns det ingen anledning att tro att han krånglade till arbetet för sig genom att först mäta diametern och därefter räkna ut omkretsen. Däremot bör det ha varit naturligt för honom att *efteråt* ha studerat förhållandet mellan omkretsen och diametern och det kan då vara värt att notera att den noggrannhet som han anger förmodligen inte var den bästa som han kunde uppnå, men att den däremot fyllde alla praktiska behov.

[44] Det bör påpekas att trädet i historien faktiskt spelar en väsentlig roll.

Ett annat arbete som illustrerar samma nyfikenhet och vilja att teoretiskt förstå det han först gjort praktiskt är den berömda skriften *Om flytande kroppar,* där han bl.a. formulerar den lag som brukar kallas *Arkimedes princip.* Detta arbete brukar sättas i samband med historien om *kungens krona,* och brukar leda till att sentida förtäljare använder principen i sin beskrivning av hur han löste problemet. Den beskrivning som ges av Vitruvius är dock lättare och även i detta fall så finns det anledning att tro att den praktiskt lagde Arkimedes använde det enklaste sättet.

Några av Arkimedes mest berömda arbeten handlar om parablar men eftersom detta kapitel handlar om cirkeln ska jag istället övergå till det arbete som Arkimedes själv betraktade som sitt förnämsta och som han därför ville ha illustrerat på sin gravsten. Om vi börjar med gravstenen så var det hans önskan att denna skulle prydas av en sfär, en cylinder och förhållandet $2:3$. Det förutsattes också att sfären var inskriven i cylindern, d.v.s. att dessa hade samma radie, säg R, och att cylinderns höjd var $2R$. Att han också ville ha förhållandet med på stenen berodde på att det var detta som var hans stolthet. Han hade nämligen i ett arbete *Om sfären och cylindern* bevisat att förhållandet mellan sfären och cylindern var just $2:3$, och detta antingen man mätte ytorna eller volymerna. För oss är detta lätt att bevisa eftersom vi kan använd välkända formler, dels för omkretsen och ytan av en cirkel, dels för ytan och volymen av en sfär. Med hjälp av dessa formler kan vi räkna ut att ytorna är

$$4\pi R^2 \quad \text{för sfären och} \quad 6\pi R^2 \quad \text{för cylindern}$$

medan volymerna är

$$\frac{4\pi}{3}R^3 \quad \text{för sfären och} \quad 2\pi R^3 \quad \text{för cylindern.}$$

Dessa formler kan sägas ha varit både välkända och helt okända under antiken. Man visste nämligen att exempelvis förhållandet mellan två cirklars omkretsar var detsamma som förhållandet mellan radierna och att förhållandet mellan ytorna var detsamma som mellan kvadraterna på radierna men även om man skulle ha kunnat tala om förhållandet mellan en cirkels yta och kvadraten på dess radie skulle man inte ha uppfattat detta förhållande som ett tal. Det bör också påpekas att ytan av en sfär inte var något vedertaget begrepp. Om vi trots dessa invändningar tolkar deras faktiska kunskaper som att de faktiskt kände till formlerna så kvarstår trots detta en avgörande okunskap. När vi skriver dessa formler använder vi samma symbol, den grekiska bokstaven π i dem alla, vi vet ju nämligen att förhållandet mellan en cirkels omkrets och dess diameter är detsamma som mellan dess yta och kvadraten på radien, *men,* och det är ett viktigt men, detta är något som man vid denna tid möjligen kunde ana men absolut inte veta. Vi kan därför tolka den tidens vetande som om man visste att det fanns konstanter som vi kan kalla, π_1, π_2, $,\pi_3$ och π_4 sådana att för en cirkel eller sfär med radien R är

$$\begin{aligned} \text{cirkelns omkrets} &= 2\pi_1 R, \\ \text{cirkelns area} &= \pi_2 R^2, \\ \text{sfärens yta} &= 4\pi_3 R^2 \text{ och} \\ \text{sfärens volym} &= \frac{4\pi_4}{3}R^3. \end{aligned}$$

Tittar vi nu närmare på vad förhållandet $2:3$ betyder för yta och volym, och om vi också kombinerar detta med det han hade bevisat i det tidigare arbetet *Om* *mätning av cirkeln* nämligen att $\pi_1 = \pi_2$, så kan vi räkna ut att $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4$. Detta var alltså vad Arkimedes själv ansåg vara sin främsta vetenskapliga insats.[45]

Som avslutning av detta avsnitt om antikens främste matematiker vetenskapsman och uppfinnare kan det vara värt att påminna om hans död och hans sista ord. Som jag tidigare nämnt förblev Syrakusa allierat med Rom ända tills kung Hieron dog år 215 fvt. När staden därefter slöt förbund med Kartago under det andra puniska kriget, så beslöt romarna att en gång för alla bli av med sin opålitliga granne. Under ledning av konsulen Marcellus angrep de staden och bemöttes med ett krigsmaskineri som aldrig förut skådats. De vältränade och segervana romerska soldaterna vände och flydde i skräck när de bombarderades med ett regn av stora stenar och besättningarna på fartygen kastade sig i vattnet för att undfly de väldiga gripklor som lyfte upp skeppen i luften och krossade dem mot land. Själva solen tycktes stå på försvarnas sida eftersom dessa riktade dess strålar mot de anfallande skeppen och satte dem i brand.

Så förtäljer åtminstone den romerske författaren Plutarcus, som tillägger att det var Arkimedes ensam, hans intelligens och skaparkraft som försvarade staden. Allt de övriga invånarna i staden behövde göra var att avlossa kastmaskinerna.

Hur mycket av Plutarcus berättelse som är sant lär det vid det här laget vara omöjligt att ta reda på. Säkert är dock att staden motstod två års belägring av en överlägsen fiende, och att den föll först sedan Marcellus haft tillfälle att under förhandlingar med stadens ledare (inne i staden!) finna dess svaga punkt. Under en natt då stadens invånare till gudinnan Dianas ära berusade sig så besatte Marcellus ett befästningstorn, medan de sov ruset av sig lyckades han inta murarna i närheten och när de vaknade ur baksmällan så ljöd de romerska stridslurarna.

Den ende som inte tycktes märka vad som skedde var Arkimedes som satt i parken, lutad över ett geometriskt problem. När en romersk soldat kom störande nära så föste han undan honom med de berömda orden — *Rubba icke mina cirklar.* Soldaten, som inte var van vid en sådan behandling, reagerade med att hugga av honom huvudet. Visserligen hade Marcellus givit stränga order om att just Arkimedes inte fick dödas utan skulle föras direkt till honom, men hur skulle en enkel romersk soldat kunna ana att den där gubben i parken var den fruktade Arkimedes.[46]

Erövringen av Syrakusa var ingen stor militär händelse, men den markerade övergången från grekiskt till romerskt herravälde i östra Medelhavet. Den innebar också att en värld som upplysts av grekisk filosofi övergick i en värld styrd av romersk lag och att ett samhälle inspirerat av mjuka cirklar förvandlades till ett samhälle dominerat av hårda fyrkanter.

14. Hjulen börjar mala

Även om den romerska krigsmaskinen rullade vidare efter erövringen av Syrakusa så dröjde det ändå nästan två århundraden innan Alexandria och de sista grekiskt styrda rikena vid östra Medelhavet föll för övermakten. Under denna tid fortsatte också cirkeln att spela en viktig roll för både vetenskapen och tekniken, även om dess centrala roll inom den rena geometrin delvis övertogs av kägelsnitten.

[45] Den franske matematikern P. Lelong lär åtminstone muntligen ha yttrat att den främsta ära som en matematiker kan vinna är att hans resultat blir så allmänt accepterat att det ingår som en självklarhet i vår tillvaro. Med detta mått mätt hade Arkimedes uppenbarligen rätt i sin egen bedömning av sina vetenskapliga insatser!

[46] Eftersom den ensamme romerske soldaten knappast förstod grekiska är det inte troligt att han ordagrant kunde återge Arkimedes uttalande, men eftersom orden blivit bevingade så var det vad han sa — antingen någon hörde det eller ej.

Antikens främste kännare av kägelsnitten[47] var Apollonius från Perga (c:a 262 – 190 fvt). Apollonius, som också var en framstående astronom, var en av antikens absolut främsta vetenskapsmän. Hans 8 böcker om kägelsnitten (varav 7 finns bevarade) brukar betraktas som den klassiska geometrins absoluta höjdpunkt.

Som astronom frångick han den modell, som skapades av Eudoxus och vidareutvecklades av Aristoteles och ersatte denna med en helt ny modell av solsystemet. Som en kuriositet kan det vara värt att nämna att den allvarligaste bristen hos denna modell varken var att den hade jorden i centrum eller att planetbanorna antogs vara uppbyggda av cirklar (istället för de ellipser som han själv kände så väl till och som Kepler 1800 år senare skulle använda för att beskriva solsystemet[48]), utan istället antagandet att planeterna rörde sig med likformig hastighet i sina banor. Modellen vidareutvecklades och förbättrades av bland andra Hipparchos och Ptolemaios och gav så småningom så god överensstämmelse med observationerna att det dröjde mer än ett och ett halvt årtusende innan det uppstod behov av en bättre.

Samtidigt som de matematiska modellerna förbättrades så utvecklades mätinstrumenten och därmed också de astronomiska observationerna. Detta ledde till att modellerna blev alltmer kvantitativa och krävde allt fler och alltmer komplicerade beräkningar. För att klara dessa beräkningar så använde matematikerna sexagesimalbråk. De skrevs visserligen med grekiska talsymboler men idén och inspirationen kom från Babylon. Samtidigt bör det påpekas att de utförde beräkningarna i sina geometriska modeller vilket innebar att de utvecklade en helt ny *kvantitativ* geometri, där de istället för att bevisa att två trianglar var lika (d.v.s. kongruenta) räknade ut deras sidor och vinklar. Denna nya geometri kallades *tri-gono-metri,* vilket på latin blir *tri-angulo-metri* och på svenska "tre-hörningsmätning" och brukar betraktas som den alexandrinska vetenskapens viktigaste bidrag till matematiken.

Samtidigt som romarriket långsamt bredde ut sig i norr och vetenskapsmännen arbetade vidare i Museion, så levde också vardagslivet i staden vidare. Alexandria var då den största stad som världen skådat och hade också det dittills mest differentierade näringslivet. Bland de nya näringar som uppstod i staden spelade bagerierna en viktig roll. Det har beräknats att före tillkomsten av dessa så gick mer än en femtedel av arbetstiden i hemmen åt till att framställa bröd. Detta berodde dels på att brödet var en basföda som man inte kunde vara utan och dels på att arbetet var tungt och krävande. Det bestod av tre moment, av vilka det första, nämligen att mala säden till mjöl var det tyngsta. Även i de nya bagerierna var detta det tyngsta arbetet och eftersom dessa behövde stora mängder av mjöl så förbättrades kvarnarna snabbt. Enkla handkvarnar ersattes av vridkvarnar som även de först var handdrivna, men som när de blev större drogs av åsnor eller oxar. Fortfarande var dock arbetet tungt och även oxar blev trötta. Den slutliga befrielsen från det som då varit människans tyngsta slit i åtta årtusenden kom med vattenmöllan. De första vattenhjulen hade byggts i strida strömmar och för okända syften under ett par århundraden innan man någon gång omkring år 100 fvt kom på att använda dem för att driva kvarnar.

Med vattenmöllan har vi kommit till en naturlig slutpunkt för detta kapitel där vi sett hur cirkeln under årtusendena närmast före våre tideräkning trängde alltmer in i människornas liv.

[47] Ett kägelsnitt erhålls som skärningen mellan en cirkulär kon och ett plan. De kurvor som kan uppstå på detta sätt är ellipsen, parabeln och hyperbeln. Se appendix K1.

[48] Se appendix K.

KAP.4. SIFFRORNA

1. Pax Romana

Sedan romarna under det sista århundradet fvt erövrat Egypten blev Medelhavet i praktiken ett romerskt innanhav. Det romerska riket bestod sedan i nästan ett halvt årtusende och gav förutom fred i de centrala delarna också ett visst välstånd, åtminstone för vad vi idag skulle kalla medelklassen. Förutsättningarna för detta välstånd var ett effektivt jordbruk och en livlig sjöfart kors och tvärs över Medelhavet. Eftersom riket också hade ett effektivt skatteväsen hade staten råd att hålla en stor armé med uppgift att dels kväsa uppror och dels hålla krigiska grannfolk utanför riket.

Den romerska överklassen hyste en stor beundran för den grekiska kulturen och filosofin, men den hade inget större intresse för den grekiska vetenskapen. Detta gjorde att samtidigt som den romerska tiden kännetecknas av praktfulla byggnadsverk och en i alla avseenden hög kultur så upphörde den vetenskapliga utvecklingen nästan helt. Detta berodde dock förmodligen inte bara på det bristande intresset utan också på att basen för grekernas vetenskap, d.v.s. den euklidiska geometrin redan uttömt sina möjligheter som hjälpvetenskap. Det som vetenskapsmännen skulle ha behövt var en matematik som tillät *räkning*, och förutsättningen för en sådan matematik saknades.

Centrum för den vetenskapliga utveckling som trots allt förekom under romartiden var fortfarande Alexandria och det var fr.a. inom två vetenskaper som det gjordes insatser som långt senare skulle få betydelse. Den ena av dessa var *alkemin* och den andra var matematiken. Alkemin ledde dels till uppkomsten av en ”kemisk hantverkstradition” som via araberna kom till Europa under senmedeltiden, dels till upptäckten av nya material, exempelvis ofärgat glas.

Den främste matematikern under denna tid var Diophantos som levde på 200-talet, och som därmed kom för sent för att hinna påverka sin egen tids matematik. Han översattes dock till arabiska och därifrån till latin, och fick därigenom senare stor betydelse för matematikens utveckling. Diophantos viktigaste arbete hette *Aritmetica,* och behandlade vad vi idag kallar algebra och talteori. Han sysslade bl.a. med obestämda ekvationer varvid han främst sökte lösningar som kunde skrivas som kvoter av hela tal, d.v.s. som bråk. Till skillnad från sina föregångare uppfattade han bråk som riktiga tal. Han använde också nya symboler för att skriva matematik, symboler som visserligen har ersatts av nyare och enklare, men som var betydelsefulla främst för att de visade vilka möjligheter som förbättrade symboler skapade.

Under de följande århundradena ersattes den grekiska rationella filosofin alltmer av den framväxande kristendomen som grund för världsuppfattningen. Detta innebar samtidigt att *tron* blev viktigare än tänkandet, något som naturligtvis fick allvarliga konsekvenser både för matematiken och vetenskapen. Den sista antika matematiker som gått till historien var Hypatia (370–415), som också var den första kända kvinnliga matematikern under antiken. Liksom de flesta senantika matematikerna läste hon och studerade de gamla mästarna, främst Apollonius och Diophantus, och gjorde egna kommentarer och tillägg till dessa. Under en tid då kristendomen blev alltmer dominerande i staden höll hon fast vid sina platoniska ideal och genom att hon också hade en politiskt betydelsefull roll så sågs hon som ett hot och en fiende. En marsdag år 415 drogs hon ur sin vagn och sönderslets av en grupp kristna fanatiker. Hypatia var berömd såväl för sin skönhet som för sin intelligens och sitt kunnande och genom sin tragiska död har hon blivit en symbol för den antika vetenskapens undergång.

Efter det västromerska rikets fall år 476 inträdde större delen av Europa i vad som brukar karakteriseras som den mörka medeltiden. Det som ännu återstod av den klassiska grekiska kulturen fick visserligen en fristad i det bysantinska riket men där förde den en tynande tillvaro. När matematiken, och därmed så småningom också andra vetenskaper, åter började utvecklas, så skedde detta långt borta i en helt annan del av världen.

2. Konsten att räkna III

I återstoden av detta kapitel ska vi studera uppkomsten, framväxten och utvecklingen av vårt nuvarande talsystem. Detta talsystem, det decimala positionssystemet, är ett sätt att *skriva* tal som ligger nära vårt sätt att säga dem och som därför är ganska lätt att lära sig. För utvecklingen av den typ av kunskap som jag i inledningen kallade hjärnans kunskap är det av (minst) samma betydelse som alfabetet. Till skillnad från alfabetet är det dessutom i flera avseenden *perfekt* och används därför på samma sätt över hela världen. De enda tekniska uppfinningar som varit av samma betydelse är hjulet och boktryckarkonsten.

Detta avsnitt är det tredje som fått rubriken – *konsten att räkna* – men medan de två tidigare verkligen handlade om att räkna i ordets ursprungliga betydelse så kommer detta avsnitt att handla om konsten att göra beräkningar. Vi kan därför börja med att påminna oss att symboliska sätt att för ögat ange antal användes långt innan mänskligheten hade kommit på att även det talade språket kunde översättas till något som kunde förstås med hjälp av ögonen. Eftersom de allra flesta av dessa tal tillverkades för stundens behov så finns det inte mycket som bevarats eller beskrivits. Vi vet att människor gjorde skåror i trä därför att detta var något som förekom under vår egen medeltid och vi vet att inkaindianerna i Peru knöt knutar på snören eftersom det var något som de spanska erövrarna fick se med egna ögon. Hur länge som dessa metoder använts eller hur många högar med småsten som lagts upp på bord eller ned i skålar vet vi däremot ingenting om. I några få fall har skåror ristats i ben som bevarats och därför vet vi att det förekom i Kina under tidig neolitisk tid. Man har också funnit ett närmare 30 000 år gammalt vargben i Tjeckoslovakien med skåror för räkning. Skårorna kommer i grupper om fem och det finns elva sådana grupper.

De metoder för att ange tal som på något sätt bevarats är de som redan från början hade till syfte att *dokumentera* ett antal, och som sedan av en tillfällighet råkade bevaras mycket längre än vad som ursprungligen hade avsetts. Dessa metoder är dock just för att de var till för att sparas olämpliga för att utföra ens de enklaste beräkningar. För att utföra enkla additioner och subtraktioner använde våra förfäder istället under långa tider helt enkelt små stenar, en sedvänja som återspeglas i vårt ord *kalkyl* (från latinets calculus (liten sten) för att utföra beräkningar. När de antal som skulle räknas blev större och våra förfäder för mer än 5 000 år sedan hade lärt sig att räkna till tusen så blev det också naturligt att använda små stenar för ental, något större för tiotal och stora för hundratal.[49]

Nästa steg bör ha varit att man exempelvis hade olika skålar för ental, tiotal och hundratal, eller att man drog streck i sanden så att stenar inom en del angav ental, inom en annan tiotal o.s.v. Detta gick bra överallt där det var gott om småsten men när handeln drog in i husen så blev det praktiskt för handelsmännen

[49]Som jag nyss påpekade finns inga bevarade spår av sådana händelser så att allt detta är enbart spekulationer. Dock finns det vissa språkliga rester i olika indo-europeiska språk. Dels är *tu* i det germanska ordet *tusen* släkt med *tu* i tumme och hade ursprungligen betydelsen stark eller kraftig, dels finns det zigenardialekter där ordet för *hundra* betyder ungefär *stor-tio* och andra där ordet för *tusen* betyder *stor-hundra.*

att ha med sig egna uppsättningar av stenar, och om de skulle räkna stora tal kunde de också behöva dukar där markeringar för ental, tiotal och hundratal redan var givna. Så småningom standardiserades dessa hjälpmedel vilket ledde till att de ibland tillverkades av beständigare material. De äldsta bevarade spåren av sådana hjälpmedel kommer från Grekland där det dels finns en avbildning på en berömd vas, den s.k. Dariusvasen från 400-talet (fvt) och dels en verklig räknebräda som hittats på ön Salamis.

Dessa räknebräden kallades på grekiska för *abakion* ($\alpha\beta\alpha\kappa\iota o\nu$) eller *abax* ($\alpha\beta\alpha\xi$). Räknandet utfördes däremot alltid vid ett bord, på grekiska *trapeza* ($\tau\varrho\alpha\pi\varepsilon\zeta\alpha$). Betydelsen av detta bord kan ses i att ordet *trapeza* fortfarande är den grekiska benämningen för en bank. Även vårt ord har f.ö. ett liknande ursprung. Banken eller bänken var nämligen den plats där den medeltida penningräknaren arbetade.

Människan har alltid haft svårigheter även med de enklaste additioner och har i alla tider använt hjälpmedel för dem. Hjälpmedlen har varit anpassade efter och berott på dels den tekniska utvecklingsnivån, dels hur stora tal som skulle beräknas. Det började med små stenar, fortsatte med räknebräden i väst och kulramar i öst innan man under några århundraden kunde nöja sig med papper och penna. Att det var betydligt svårare att räkna på papper märks om inte annat på att allteftersom användningen av räknebräden minskade så ökades ansträngningarna att tillverka mekaniska räknemaskiner.[50] Under 1800-talet förbättrades och förbilligades dessa tillräckligt mycket för att bli om inte var mans egendom, så åtminstone en nödvändighet i de flesta butiker. Idag går redan skolbarnen omkring med miniräknare som räknar snabbare än talen kan sägas.

De tekniska hjälpmedlen har alltid varit tillräckliga för alla vardagliga behov av beräkningar och detta har inneburit att skrivna tal i de allra flesta fall enbart använts för att dokumentera resultaten av räkningar. De enda egenskaper hos ett system för att *skriva* tal som var av betydelse var därför att de var *lätta att skriva och läsa* och *svåra att förfalska*. Eftersom dessutom stora tal regelmässigt ersattes med stora enheter så var det främst talen från ett till tusen (eller snarare 999) som behövde skrivas. Dessutom bör det påpekas att alla mer beständiga skrivmaterial förr var alltför dyra för att användas som kladdpapper för räkningar.[51]

De enda som hade behov av att utföra noggranna beräkningar med stora tal var därför matematiker och astronomer. Detta gjorde att när det väl utvecklades ett sätt att skriva tal som dels var lätt att skriva och läsa, dels var praktiskt för beräkningar, så var det matematiker och astronomer som utvecklade det. Att det kom att ske just i Indien kan delvis ha haft religösa skäl eftersom man där föreställde sig en värld som bestått i inte tusentals utan miljontals år och hade namn för tal som vi skulle kalla oktillioner och nonillioner och som vi skriver som en etta med närmare 50 nollor efter sig.

3. Indiens tidiga historia

Medan västeuropa efter det västromerska rikets fall kom att domineras av de germanska folk som greker och romare brukat kalla barbarer, så bestod för en tid det östromerska riket tämligen intakt. Öster därom härskade den Sassanidiska dynastin över ett stort persiskt rike och ännu längre österut hade det uppstått en säregen högkultur kring de stora floderna Indus och Ganges. Denna indiska kultur

---

[50] Den första fungerande räknemaskinen tillverkades av Blaise Pascal (1623 – 1662) år 1642.

[51] Ofta brukar andra talsystem än vårt eget kritiseras för att de inte är lämpliga för beräkningar, vilket visserligen må vara sant, men det är en kritik som var fullkomligt irrelevant för dem som använde systemen.

kan rentav beskrivas som den sista av de högkulturer som under årtusendena fvt växte upp kring stora floder.

Den tidigaste kända högkulturen inom detta område tycks ha uppstått i Indusdalen omkring år 3000 fvt. De första fynden efter den gjordes i närheten av den nutida staden Harappa, och i brist på bättre benämningar brukar man därför ofta tala om Harappa-kulturen. Eftersom sjövägen låg öppen brukar det förutsättas att denna kultur hade förbindelser med det samtida Sumerriket i Mesopotamien. Jämfört med kulturerna i Mesopotamien och Egypten är denna Induskultur mycket lite utforskad och det mesta om den är ännu okänt. Det största hindret för forskningen är att man inte vet något om det språk som talades eller ens vilken språkfamilj som det tillhörde. Kulturen hade en egen skrift och även om man tror att det språk som talades och skrevs tillhörde den dravidiska[52] språkfamiljen så har skriften ännu inte kunnat tydas. Det man säkert vet är att en indo-europeisk folkgrupp, arierna, började tränga in från nordväst under det andra årtusendet fvt. Arierna förde med sig en egen mytologi som visserligen hade ett tydligt indo-europeiskt ursprung, men som på sin väg till Indien hade plockat upp andra element, och som efter ankomsten till Indien utvecklades till ett invecklat religions-filosofiskt system. Ett viktigt, för att inte säga dominerande, inslag i detta var läran om själavandringen, som visserligen hade uppstått som ett sätt att undfly döden, men som allteftersom tiden gick kändes alltmer tyngande. Detta ledde till att *frälsning* i indiska religioner, som hinduism, buddhism och jainism inte brukar bestå i frälsning från *döden* utan en frälsning från återfödandet. Denna frälsning innebär att själen efter döden befrias från det eviga pånyttfödandet och istället får uppgå i världsalltet, *Nirvana*. Utmärkande för Indien är också det *kastväsen*, som uppstod tillsammans med religionen och som helt dominerar samhällslivet.

För vårt vidkommande är det inte detaljerna i den indiska religionen som är viktiga utan bara det faktum att religionen fick en dominerande roll i allt indiskt liv. Detta innebar nämligen att det liksom i sumerriket uppstod en betydelsefull grupp av präster och därmed en intellektuell elit som kunde ägna sig åt filosofi, matematik och vetenskap. Den tidiga ariska tiden, fram till ungefär år 600 fvt brukar kallas *Veda*-perioden, efter de religösa verk som då skrevs. Mot slutet av Vedatiden hade religionen blivit så dominerande att man kan tala om ett religöst tyranni, något som skapade utrymme för nya religioner och läror. Den viktigaste av de stora religionsskapare som framträdde vid denna tid var Buddha (560–483 fvt) vars lära snabbt spreds över stora delar av Indien och sydöstra Asien, men även Jina (540–468 fvt) skapade en religion som fortfarande har ett stort antal anhängare, de s.k. *Jainisterna*. Då hade Indien, ända sedan ariernas ankomst, i över 1000 år varit förskonat från angrepp utifrån.

Denna mer eller mindre frivilliga och mer eller mindre totala isolering från omvärlden bröts dock under 500-talet fvt då större delen av Indusdalen införlivades med det mäktiga perserriket. När detta försvagades under de följande århundradena bröt sig de indiska delarna ur riket, så att när Alexander den store nådde Indus, så var landet däromkring återigen under indiskt styre. I slaget vid Hydaspes år 326 ställdes för första gången en europeisk här mot en orientalisk försedd med stridselefanter. Även om dessa inte räckte till mot Alexanders stridsvana soldater, så tycks de ha gjort ett outplånligt intryck på segrarna, och elefanter kom senare att användas även i Europa av både greker och kartager.

Efter Alexanders fälttåg så bröts aldrig de kulturella förbindelserna mellan Indien och länderna runt Medelhavet. Den indiska kulturen har visserligen fortsatt

[52]De dravidiska språken är idag de dominerande i södra Indien. De idag mest talade dravidiska språken är *tamil* och OBS

att vara säregen men utvecklingen har skett under ständig yttre påverkan. Det bör f.ö. påpekas att isoleringen aldrig var total eftersom det dels alltid förekommit kontakter via de afghanska passen i nordväst, dels alltid förekommit sjöfart på Indiska Oceanen. Under långa tider fanns det t.o.m. en kanal från Nilen till Röda Havet vilket gjorde att det faktiskt förekom direkta sjöförbindelser mellan Indien och Medelhavet. De stora sjöfartsnationerna var (åtminstone ur ett europeiskt perspektiv) i tur och ordning fenicier (*ca.* 1500– *ca.* 300 fvt), greker och romare (*ca.* 300 fvt – *ca.* 600 evt) och slutligen araber (*ca.* 600 – *ca.* 1500), innan de europeiska staterna i slutet av 1400-talet nådde Indien genom att segla runt Afrika.

4. Indisk matematik och vetenskap

En kort tid efter Alexanders fälttåg grundade Chandragupta ett rike som under hans sonson Aśokas (regeringstid 272 – 231 fvt) växte ut till det första verkliga imperiet i Indien. Efter en våldsam inledning blev Aśokas styre en tid av fredlig utveckling. Den har kvarlämnat ett stort antal minnesstenar runt om Indien som är intressanta även för vårt vidkommande eftersom deras inskriptioner innehåller de äldsta föregångarna till vårt nuvarande talsystem.

Efter Aśokas tid finns det bevarade inskriptioner på olika ställen i Indien som visar hur skrivandet av tal utvecklades, hur av 27 tecken 9 blev viktigare och sakta förändrades, delvis i riktning mot våra nuvarande siffror. Det bör dock påpekas att dessa tecken ännu inte ingick i ett positionssystem, utan mer var att likna vid det samtida grekiska sättet att skriva tal med hjälp av bokstäver, d.v.s. att man därför behövde 27 tecken för att skriva alla tal mellan 1 och 999. Det är dock värt att påpeka att en viktig skillnad var att man inte använde samma symboler för tal och bokstäver.

Efter Aśokas död delades hans välde och förlorade i betydelse. Trots detta så var de hellenistiska och romerska tiderna från ungefär 300 fvt till 500 evt en relativt fredlig tid även i Indien. Det var också en tid med livlig handel på Indiska Oceanen, en tid då Rom hade handelsstationer i Indien och kinesiskt porslin kom till Zanzibar. Även om handelsförbindelser inte nödvändigtvis leder till kulturellt utbyte, så ställer det dock alltid krav på viss ömsesidig förståelse. Framför allt är det absolut nödvändigt att handelsmän kan läsa och förstå varandras sätt att skriva tal. Detta innebär också att även om olika kulturer skrev sina tal på olika sätt så kunde de förstå varandras. Trots att de kan ha använt olika symboler så bör därför sjöfararna på Indiska Oceanen under seklernas gång ha utvecklat ett gemensamt sätt att ange tal, och det troliga är att det var ett sätt som låg nära det som användes av grekerna i handelns huvudstad Alexandria.

Att de indiska talsymbolerna, till skillnad från exempelvis de grekiska, så småningom kom att utvecklas till ett positionssystem, hade förmodligen åtminstone två viktiga orsaker av vilka den första var att symbolerna inte samtidigt användes som bokstäver. Den andra och viktigare var att de indiska matematiker som under några århundraden efter det västromerska rikets undergång övertog grekernas ledande roll inom astronomin var ännu mer decimala än vad grekerna hade varit.

Några av de mest kända av dessa indiska matematiker var Aryabhata (f. år 476), Varaha Mihira (500-talet) och Brahmagupta (f. 598). Den äldste av dessa var verksam i eller i närheten av kejsar Aśokas huvudstad Pataliputra, nuvarande Patna, som låg vid Ganges ungefär mittemellan New Delhi och Calcutta. De övriga arbetade vid det observatorium i Ujjain, i västra Indien, som då var den hinduiska vetenskapens centrum. Alla dessa hade, som astronomer, oerhörda tidsperspektiv om miljontals år, naturliga för den som tror sig ha levat genom alla dessa år, och alla hade behov att att skriva stora tal. De kände alla till och utnyttjade den alexandrinska trigonometrin med dess blandning av decimala heltal och sexagesimala bråk och kände därför till det sexagesimala positionssystemet med nolla och allt. Trots detta var vägen till ett decimalt positionssystem lång och krokig och innehöll dessutom några intressanta mellansteg. En av dessa egendomligheter på vägen var att talen vändes bak och fram så att man började med entalen, fortsatte med tiotalen o.s.v. Ett annat mellansteg som för oss verkar egendomligt, men som förmodligen låg i linje med hinduernas litterära traditioner, var att använda ett slags språkligt ”abstrakt” positionssystem, där talen lästes på vers. Även om vägen som sagt var slingrig och krävde att ett flertal matematiker avlöste varann och tog vid där den förra slutade så är det väsentliga naturligtvis ändå att slutresultatet blev det decimala positionssystem som vi använder ännu idag. Såvitt man idag kan bedöma så fanns det ett omvänt positionssystem i bruk ungefär år 530 medan ett rättvänt kom någon gång mellan år 550 och år 570.

5. Islam

Efter det västromerska rikets fall var de dominerande rikena runt den gamla världens navel i östra Medelhavet det alltjämt mäktiga bysantinska (eller östromerska) riket och det sassanidiska riket i Persien. Mellan och söder om dessa två fanns den stora arabiska halvön som visserligen mest bestod av öken, men som ändå inte var helt folktom. Förutom att det vid de största oaserna vuxit upp städer så fanns beduinerna som levde större delen av sitt liv som nomader i öknen. För att överleva i öknen var människorna tvungna att hålla samman och de semitiska stammar som levde där utvecklade stränga moralregler som för att få tillräcklig auktoritet uttrycktes i religösa termer.

Ett folk, bestående av 12 stammar som tidigare levat så men som redan tvåtusen år tidigare lämnat det hårda livet i öknen var hebréerna. Efter åtskilliga prövningar och hårda strider lyckades dessa på 1200-talet fvt bosätta sig i ”det förlovade landet”, landet Kanaan, i sydöstra hörnet av Medelhavet. Med sig till sin nya tillvaro hade de en egen gud, Jahve, och en religion som utgick ifrån ett förbund mellan Jahve och de hebréiska stammarna. Omkring år 1000 fvt grundade man ett kungadöme ISRAEL, vars skiftande öden under tusen år finns beskrivna i det Gamla Testamentet. Eftersom kungadömet kom att delas i ett nordligt rike Israel och ett sydligt Judéen, så kom hebréerna så småningom att kallas *judar*. Även om många, och kanske de flesta, judar blev kvar i sitt hemland, så började de tidigt att utvandra och bilda församlingar runt omkring i den hellenistiska och senare romerska världen. De kom därigenom i kontakt med den platonska idéläran och i mötet mellan judendomens Jahve och idéläran så förvandlades Jahve från en judisk stamgud till *den ende guden* och därmed till *alla människors gud*. Som sådan blev han kristendomens och därigenom så småningom också västerlandets gud.

Även om både kristendomen och judendomen blev utbredda både öster och söder om det romerska riket så utgjorde Jahves ursprungliga hemland, den arabiska öknen länge en bastion för månggudadyrkan, och det var inte förrän araberna i början av 600-talet fick sin egen förkunnare, Muhammed, som monoteismen blev dominerande i hela medelhavsområdet. Den av Muhammed grundade läran, ISLAM eller *underkastelse* (under Gud), var inte bara en strängt monoteistisk religion, utan också ett politiskt system, där den världslige härskaren, kalifen, också var alla troendes religösa överhuvud. År 750, ett drygt århundrade efter Muhammeds död (år 632) så sträckte sig det arabiska riket från Indus i öster till Atlanten i väster och från Indiska Oceanen och Sahara i söder till de stora stäpperna, Medelhavet och Pyrenéerna i norr, ett rike som väl kunde mäta sig med det romerska i omfattning.

År 750 blev Bagdad huvudstad i detta jätterike och även om kalifens världsliga makt avtog under de följande århundradena så förblev Baghdad den muslimska världens centrum ända tills staden förstördes av mongolerna år 1258. Denna period brukar ses som den islamska guldåldern och det var Baghdad som under dessa århundraden var världens vetenskapliga och kulturella centrum. I Bagdad översattes de grekiska mästarna till arabiska och studerades och kommenterades av främst arabiska och persiska vetenskapsmän. När dessa verk av grekiska filosofer, matematiker och medicinare under slutet av 1100-talet började översättas till latin och därmed blev tillgängliga för den intellektuella elit som ungefär samtidigt växte fram runt de första europeiska universiteten, så var det därför från arabiska som de översattes. Det var också detta jätterike som det nya positionssystemet skulle passera på vägen från Indien till Europa.

I Bagdad och andra muslimska lärdomssäten arbetade ett flertal framstående matematiker som lärde sig det och utvecklade det nya systemet. Den viktigaste av dessa var (den persiske matematikern) Al-Khwarizmi (c:a 780-850), *mannen som lärde världen att räkna*. Al-Khwarizmi tycks ha varit den förste som insåg att det nya sättet att skriva tal var så ändamålsenligt att det faktiskt gick att använda pennan för beräkningar. Före honom hade de flesta beräkningar utförts med mekaniska hjälpmedel som kulramar och räknebräden, och även om professionella matematiker kunde räkna med penna (på dyrbart pergament) så var detta inte möjligt för vanligt folk såsom handelsmän och hantverkare. Al-Khwarizmi skrev därför den första räkneläran, där han gav noggranna beskrivningar av hur man skulle beräkna aritmetiska uttryck med användning av de indiska siffrorna. Eftersom han insåg att en svårighet med sifferräkning är att man inte på samma sätt som då man räknar med föremål kan "se om svaret är rätt", så infogade han ett antal kontrollmetoder för att pröva räkningarna. En sådan metod som i dessa miniräknarnas tidevarv håller på att glömmas bort är att kontrollera att "siffersumman" stämmer. Dessa metoder lär dock fortfarande spela viss roll i hans eget hemland, Iran.

Det förtjänar att påpekas att ordet *siffra* är arabiskt och egentligen betyder *ingenting* eller möjligen *noll*. Jag vill också nämna att Al-Khwarizmis beskrivningar var så noggranna att vi idag kallar dem algoritmer, ett ord som egentligen är en europeisk felsägning av hans eget namn. Positionssystemet användes sedan allt mer i det arabiska riket, inte bara av matematiker och andra vetenskapsmän utan inom hela den bildade klassen. Eftersom araberna vid denna tid härskade både i Spanien och Sicilien så kom positionssystemet med dem in i Europa, men inte förrän efter korstågen nådde det in i den kristna världen.

6. Siffrorna når Europa

Istället var det enstaka matematiker och lärda som lärde sig systemet genom studier i Spanien eller Sicilien och som började propagera för dess spridning i Europa. Vi européer var dock tröga och motspänstiga. Alla tänkbara invändningar restes, allt från att det var ogudaktigt till att det var för lätt att förfalska. Den första bok som försökte lära européerna att räkna med dessa siffror, vars indiska ursprung nu var glömt och som därför kallades arabiska, skrevs av Leonardo från Pisa (mer känd som Fibonacci) och utkom år 1202. Det tog sedan mer än trehundra år för oss européer att lära oss att räkna med arabiska siffror, något som kan vara bra att komma ihåg när våra barn har svårt att lära sig att räkna.

Det bör dock påpekas att det fanns flera goda skäl till denna motvilja mot det nya systemet. Det första och viktigaste av dessa var att räknandet egentligen inte var något problem. Det enda de flesta människor alls kunde behöva räkna var pengar vilket innebar att det nästan bara var addition och subtraktion som behövdes. Dessutom var penningsystemet som regel inte decimalt, utan det typiska var istället det engelska med 12 pence på en skilling och 20 skilling på ett pund. För att utföra dessa räkningar som oftast gällde små tal använde man sin räknebräda, eller med ett finare ord *abacus*. Eftersom en abacus, som egentligen inte är något annat än en avancerad kulram, faktiskt fungerade som ett decimalt positionssystem, så kan man säga att det egentligen inte var positionssystemet som man inte ville ha och det var inte heller det decimala tänkandet utan det var bara siffrorna, som inte tillräckligt tydligt symboliserade talen. Dessutom är det värt att nämna att papper, eller vad man än kunde ha att skriva på, var dyrt, vilket innebar att det var slöseri att skriva upp uträkningar som man lika gärna kunde göra på sin räknebräda. Det enda som man använde sina romerska siffror till var för att skriva upp de färdiga resultaten, och för detta var faktiskt argumentet att de arabiska siffrorna var lättare att förfalska inte helt oriktigt. De enda som egentligen hade användning för de arabiska siffrorna var "teoretikerna", matematiker och andra vetenskapsmän, och de lärde sig naturligtvis att räkna med siffror långt innan allmänheten hade gjort det.

Avslutningsvis vill jag också påpeka att även om det kan sägas ha tagit 300 år för européerna att lära sig att räkna med siffror, så blev ändå 1500-talets europeiska matematiker de första som fullt ut utnyttjade positionssystemets alla möjligheter i och med att de uppfann och insåg betydelsen av decimalkommat och decimalbråken.

7. Decimalbråken

När européerna lärde sig att räkna med decimalbråk under 1500-talet, så var dessa inte någon nyhet. De hade nämligen redan uppfunnits minst tre gånger tidigare, första gången redan på 200-talet (evt) i det från västerlandet isolerade Kina. Det kan i detta sammanhang påpekas att även om kineserna inte använde våra siffror så räknade även de decimalt och eftersom den berömde kejsaren Shih Huang Ti (han som ville att Kinas historia skulle börja med honom), redan år 221 fvt hade infört ett decimalt måttsystem för längdmått, så blev det naturligt att åtminstone hålla sig till bråk vars nämnare var en potens av tio. De kinesiska decimalbråken var dock såpass knutna till det kinesiska måttsystemet att de varken spreds utanför Kina eller ens inom landet användes i andra sammanhang.

Nästa gång som decimalbråken uppfanns var under den islamska guldåldern, där de förekommer i en bok skriven i Damaskus på 950-talet. Författaren hette Al-Uqlīdisī och använde dem för att skriva resultatet av successiva halveringar. De användes sedan av flera olika muslimska matematiker för att bl.a. utföra rotutdragningar. Det var dock inte förrän i början av 1400-talet, när den store matematikern och astronomen Jemshid al-Kashi började använda systemet för sina beräkningar som det når sin fulla mognad. Det kan f.ö. påpekas att al-Kashi gjorde anspråk på att själv ha uppfunnit systemet, vilket tyder på att det inte var särskilt mycket använt ens i den muslimska världen före 1400-talet.

Nästa gång som decimalbråken uppfanns var det faktiskt i Europa, även om uppfinnaren var en judisk rabbin, Immanuel Bonfils från Tarascon i södra Frankrike som år 1350 föreslog ett decimalt system med minuter, sekunder o.s.v. Även om han antydde att systemet hade sina fördelar så fick det ingen spridning och blev snart bortglömt.

Ungefär samtidigt som al-Kashi uppfann ett fullständigt decimalbråkssystem började även européer upptäcka de möjligheter som positionssystemet gav. Några fick goda närmevärden till rötter genom att först multiplicera det tal som de ville dra roten ur med en miljon och sedan dela svaret med tusen, andra gjorde trigonometriska tabeller där de istället för att som vi gör titta på kateterna i trianglar inuti en cirkel med radien 1, förstorade upp skalan med 10 000 eller 100 000. De fick därigenom tabeller med noggranna värden som ändå var heltal och därför lätta att räkna med. Det de gjorde var alltså att utnyttja att positionssystemet gjorde det lätt att multiplicera med 10 och potenser av 10. Nästa steg blev att göra det lätt att också dividera med potenser av 10 genom att inte förkorta bråk, utan istället konsekvent skriva sina tal som ett heltal följd av ett bråk vars nämnare var en tiopotens. En kvarstående rest av denna metod är begreppen *procent* och *promille*.

Det var dock inte förrän fram emot mitten av 1500-talet som europeiska matematiker riktigt började frigöra sig från tvånget att skriva dit en tiopotens i nämnaren. Den förste som använde decimalbråken på riktigt i Europa var den tyske matematikern Christoff Rudolff som använde dem för att utföra "ränta-på-ränta-problem". Den förste som inte bara använde dem för att lösa sina egna problem utan också förstod deras stora användbarhet var flamländaren Simon Stevin. Hans bok *De Thiende*, på svenska "Tiondet" (med en medveten association till den katolska kyrkans frivilliga beskattning), utkom 1585 på holländska och redan året därpå på franska. Trots att Stevins beteckningar var otympliga så bidrog hans bok till att decimalbråken fick en snabb spridning. Sedan gick utvecklingen raskt vidare. Otympligheterna i Stevins skrivsätt försvann och därmed blev räknandet så lätt att beräkningar, som tidigare varit närmast oöverstigliga hinder för matematiker och naturvetenskapsmän plötsligt kunde utföras på en bråkdel av den tid som tidigare krävts. Resultatet blev naturligtvis att man snart gav sig på så komplicerade beräkningar att de tog lika lång tid som förut. Speciellt upptäckte man snart att multiplikationer av tal med många siffror tog lång tid att utföra. Eftersom alla trigonometriska beräkningar, som var av stor betydelse för astronomin, innehöll sådana multiplikationer, så uppstod det ett behov av nya metoder för att underlätta dessa. Den som löste detta problem var Napier, som med uppfinningen av logaritmerna sades ha fördubblat astronomernas livslängd.

Långt dessförrinnan använde dock aktiva matematiker på egen hand decimalbråk. En som tidigt hade insett användbarheten var Kepler och hans berömda lagar om planetbanorna kan betraktas som decimalbråkens första stora triumf.

Decimalbråkens verkliga betydelse låg dock mycket djupare än att bara göra det möjligt att lättare räkna med bråk. Deras verkliga betydelse låg nämligen i att de gav upphov till ett helt nytt sätt att se på kontinuerliga, speciellt geometriska storheter. Med decimalbråken löstes nämligen det 2000 år gamla problem som uppstod med Pythagoras upptäckt av de irrationella talen. Men därmed har vi kommit in på ett helt nytt talbegrepp, nämligen begreppet reella tal, vars utveckling vi ska följa i nästa kapitel.

KAP.5. Reella Tal

I detta kapitel ska jag börja med att ge min syn på hur föreställningen om de reella talen växte fram och därefter antyda något om vilka nya möjligheter som detta talbegrepp gav. Liksom i de övriga kapitlen kommer jag främst att följa det jag uppfattar som matematikens huvudfåra vilket innebär att jag börjar hos sumerer och babylonier, sedan hoppar över till Grekland där jag berör dels den klassiska perioden (från Pythagoras till Eudoxos) och dels den alexandrinska. Därefter kommer jag att snudda vid den indiska och islamiska matematiken innan jag återvänder till Europa under renässansen. Allra först ska jag dock börja med att sätta in de rella talen i sitt ursprungliga sammanhang.

1. Hantverkets matematik

Uppfinnandet av jordbruket är utan all jämförelse den händelse som mest genomgripande förändrat människans livsvillkor. Det kan ses som det första steget i en lång utveckling där människan undan för undan gjort sig till herre över allt större delar av naturen. Det kan också ses som början till och förutsättningen för den fördelning av arbetsuppgifter som utmärkt alla "utvecklade" samhällen och kulturer. Jordbruket gjorde det inte mindre arbetssamt att skaffa mat, snarare tvärtom, men det blev för första gången möjligt att skaffa mat i överflöd. Med jordbruket kunde *en* familj med obetydligt ökad arbetsinsats producera mat för *två* familjer. Dessutom var den föda som producerades, främst säd för brödbak, hållbarare än det mesta av det man tidigare livnärt sig på. Detta innebar att en jordbrukande familj inte längre behövde tillverka allt vad man behövde, eftersom man kunde byta till sig kläder och skor, redskap och verktyg och kanske fisk eller kött mot det överskott som åkern givit. Omvänt innebar detta att andra kunde leva på att förse jordbrukarna med de varor som dessa inte längre hade tid att skaffa eller göra själva. Därmed uppstod hantverket som yrke. Med specialiseringen ökade erfarenheten och yrkesskickligheten. En annan viktig följd av jordbruket blev att fler människor kunde bo nära varann, vilket gjorde det möjligt att samarbeta i större grupper, både för att försvara sig och för att genomföra större arbeten. Därigenom blev det möjligt att bygga större hus och båtar och t.o.m. så avancerade byggnadsverk som broar och kanaler. Dessa gemensamma arbeten ledning och planering och därmed uppstod så småningom ett behov av en hantverkets matematik. Senare ökade också handeln samtidigt som det inom större riken uppstod administration. Den matematik som dessa behövde var främst aritmetiken, d.v.s. det räknande med naturliga tal som vi redan berört.

I detta avsnitt ska vi istället beröra den matematik som hantverket krävde. Låt oss börja med bygget av ett något större byggnadsverk. Vi kan därvid anta att man började med att bestämma var byggnaden skulle uppföras och i stora drag också hur den skulle se ut och hur stor den skulle bli. Nästa steg blev att jämna ut och kanske gräva ut en lämplig plats för bygget. Vi vet också att åtminstone sumererna spände rep mellan lämpligt utplacerade käppar eller pinnar och vi kan anta att ledaren, arkitekten eller byggmästaren, hade någon form av modell, ritad på plant underlag eller tillverkad av mindre delar, för det färdiga verket.

Därefter måste man börja transportera fram byggnadsmaterial och vi kan anta att det var en fördel om mängden var tillräcklig utan att det blev alltför stora överskott. Eftersom arbetsledaren inte kunde vara överallt måste många arbeten utföras om inte utan övervakning så åtminstone med annan övervakning. Detta innebar att man måste kunna noggrannt beskriva olika arbetsmoment. I dessa beskrivningar ingick det alltid storleksbeskrivningar. Dessa innebar i sin tur att man behövde mått och måttsystem. Det vetenskapliga ordet för detta, för mätandets konst är *metrologi.* Det är också metrologin som är hantverkets matematik.

Mätning handlar om att omvandla *kontinuerliga* storheter som längd, yta, volym eller vikt, till diskreta, d.v.s. sådana som kan beskrivas av naturliga tal. Även om storleksbeskrivningar mycket väl kan och bör ha förekommit innan människor började uppföra stora byggnadsverk, så ledde dessa till ett behov av enhetlighet och noggrannhet. I alla antikens stora högkulturer växte det fram måttsystem, där man för mätning av längder hade en standardiserad fot eller aln och för vikter ett standardiserat pund. Med de stora byggnadsverken blev mätandets problem en angelägenhet för de mäktiga i samhället och därmed även för de intellektuella, vilket gjorde dem till en uppgift för matematikerna. Framväxten av sumerernas sexagesimalsystem är ett tidigt exempel på hur metrologin gav upphov till matematisk utveckling och själve Pythagoras lär ha varit inblandad i den utveckling av ett nytt måttsystem, som ägde rum i Magna Græcia under 500-talet fvt.

Samtidigt är det ju uppenbart att om man vill veta hur mycket sten som går åt för byggandet av t.ex. en pyramid så måste man antingen mäta volymer eller utföra beräkningar och i själva verket kräver alla större byggnadsverk noggranna yt- och volymsangivelser. Det är också lätt att inse att det är svårt att *mäta* ytor och volymer, så att det enda naturliga sättet att få fram yt- och volymsmått är att mäta längder och använda lämpliga beräkningsformler för ytor och volymer av de geometriska former som man använde.[53] Detta innebär att arkitekter och andra ända sedan de första högkulturernas tid utfört beräkningar med tal som använts för att representera kontinuerliga storheter, och dessa beräkningar är vad jag kallar hantverkets matematik. De beräkningar som hantverket har krävt var ursprungligen enkla men har under århundradenas lopp blivit alltmer komplicerade.

Avslutningsvis bör det dock påpekas att det ofta varit möjligt att översätta även avancerat matematiskt kunnande till enkla tumregler, något som gjort det möjligt för hantverkare i alla tider att utnyttja resultatet av stora tänkares tankemödor.

2. Matematikens hantverk

Så länge som denna matematik endast användes som ett hjälpmedel för hantverket så kunde alla de beräkningar som behövdes utföras som räkningar med hela tal genom att man helt enkelt införde måttenheter som gav tillräcklig noggrannhet. Den naturliga frågan huruvida det alltid finns en måttenhet som gör det möjligt att ange en given storhet med ett naturligt tal är central inom matematiken men utgjorde aldrig något problem för babylonierna. Deras talsystem var ett positionssystem som användes även för bråkdelar och intuitivt innebar varje nytt tecken en ny måttenhet som var sextio gånger större eller mindre än den tidigare. Dessutom hade de ett mycket mer närliggande problem än att att räkna med irrationella tal nämligen att dividera med tal som inte var reguljära, kort sagt att skriva talet $\frac{1}{7}$.[54]

För pythagoréerna blev problemet tydligt eftersom både musiken och geometrin förutsatte lämpliga enhetslängder och upptäckten av att exempelvis sidan och diagonalen i en kvadrat inte kan mätas med en gemensam grundenhet blev något av en katastrof som fick hela deras världsbild att rasa samman.

---

[53]I alla de stora högkulturerna finns formler för yt- och volymsberäkning av geometriska figurer.

[54]Det kan också påpekas att basen 60 med några få tecken ger en så noggrann approximation att det är tveksamt om de någonsin fick anledning att upptäcka de perioder som uppstår när man allt noggrannare approximerar rationella tal med sexagesimalbråk.

Den främsta anledningen till deras svårigheter var att de saknade en allmänt accepterad uppfattning om rummets och tidens natur. I stället fanns det två konkurrerande och oförenliga teorier. Enligt den första så var de båda kontinuerliga och därmed ”oändligt delbara” och enligt den andra så var båda ”diskreta”, d.v.s. både tid och rum bestod av ”ögonblick” eller ”punkter” som följde på varann på samma sätt som bilderna i en film. Den senare kan kallas atomistisk och omfattades förutom av py också av just de antika atomisterna Leukippos och Demokritos. Ännu värre blev situationen i mitten av 400-talet när Parmenides lärjunge Zenon framlade sina paradoxer[55] och visade att båda dessa uppfattningar ledde till konsekvenser som åtminstone för samtiden föreföll orimliga. Zenons avsikt var visserligen att försvara Parmenides åsikt att all rörelse var omöjlig men effekten blev att alla verkliga försök att förstå kontinuets natur omöjliggjordes för lång tid framåt.

Trots att vi idag tror oss veta att materien är atomär medan vi uppfattar rummet som kontinuerligt så är det lättast att illustrera kontinuets natur med hjälp av materien. Vi föreställer oss därför en bit materia, exempelvis en lerklump, och antar sedan att vi har en vass kniv till hjälp för att dela den i två delar. Vi tar sedan en av bitarna och delar på nytt och fortsätter sedan på detta sätt. Frågan är bara hur länge vi kan hålla på. Enligt atomisterna kan vi bara (även i teorin) fortsätta ett ändligt antal gånger, medan de som omfattar en kontinuerlig syn på materien förutsätter att vi kan hålla på hur länge som helst, och vilket är ännu värre rentav oändligt många gånger. Eftersom grekerna skyggade för oändligheten så hade de svårt att acceptera den kontinuerliga modellen samtidigt som Zenons paradoxer gjorde svårigheterna för den diskreta uppenbara.

Konsekvensen av Zenons paradoxer blev därför att frågan om kontinuets natur avfördes från dagordningen något som också ledde till att de grekiska matematikerna och vetenskapsmännen inte ens i teorin kunde utföra de beräkningar som de skulle ha behövt. Eftersom jag ser utförandet av beräkningar som matematikens hantverk, så vill jag beskriva situationen så att matematikens hantverk under lång tid förblev en hantverkets matematik.

3. Hantverkets mästare

Som jag antytt i föregående avsnitt så löstes inte det matematiska problemet att beskriva linjens och mer allmänt kontinuets natur under antiken. Däremot kunde man trots detta lösa både abstrakta och (främst) konkreta problem som vi genom att räkna med reella tal uppfattar som självklara men som för tvåtusen år sedan innebar nästan oöverstigliga svårigheter.

För att antyda både svårigheterna och möjligheterna ska jag kortfattat beskriva några av de problem som ändå löstes och samtidigt säga något om de metoder som användes. Först bör det därvid påpekas att det finns två typer av resultat, de exakta och de ungefärliga. De exakta gav vanligen inte ett absolut svar utan ett relativt av formen att förhållandet mellan två storheter var exakt lika med antingen ett annat förhållande eller i något enstaka fall med ett tal. Alla beräkningar som utfördes före den alexandrinska perioden var exakta.

Det första är Demokritos beräkning av konens volym. Denna är intressant främst genom den metod som lär ha använts. Denna gick ut på att han tänkte sig konen skuren i tunna plan med snitt parallella med basen. Sedan beräknade han volymerna av de tunna skivorna genom att se dem som raka men tunna cylindrar och lade sedan ihop alla dessa volymer. Han såg då att kvoten mellan konens

[55] Se Appendix Z

volym och volymen av en rak omskriven cylinder närmade sig en tredjedel. Slutligen tänkte han sig att skivorna gjordes ”atomärt” tunna och hävdade att kvoten mellan de på detta sätt beräknade volymerna var precis en tredjedel. Det är värt att nämna att Leibniz mer än 2000 år senare använde samma metod och också samma föreställning om att ”infinitesimalt” tunna snitt skulle ge exakta formler. Demokritos metod har beskrivits av Arkimedes, som påstod att Demokritos beräknade volymen men att det var Eudoxos som bevisade att beräkningarna var riktiga.

Det verkligt betydelsefulla genombrottet kom med Eudoxos som angav en metod att verkligen bevisa att två förhållanden mellan storheter var lika. Metoden kan illustreras med den kanske mest berömda av hans satser, den som säger att förhållandet mellan ytorna av två cirklar är detsamma som förhållandet mellan ytorna av två kvadrater med cirklarnas radier som sidor. För att ge ett stringent logiskt bevis för detta påstående måste han ge en precis definition av vad som menades med ett förhållande mellan storheter och för det behövde han allra först ge en definition av vad han menade med en storhet. De definitioner han gav för dessa begrepp gjorde det möjligt att handskas med geometriska storheter utan att ge talvärden för dem, något som ledde till att geometrin efter honom fick en absolut särställning inte bara inom geometrin utan inom all grekisk vetenskap. Den förbindelse som Eudoxos storheter hade med aritmetiken var att man kunde addera två storheter, under vissa omständigheter dra en mindre ifrån en större, samt att man genom att lägga ihop ett ändligt antal (identiska) storheter kunde multiplicera dem med hela tal.

För att bevisa att förhållandet mellan cirklarna var som förhållandet mellan kvadraterna på radierna så utgick han ifrån det man redan visste, nämligen att påståendet gällde för månghörningar av samma form. Han antog sedan att förhållandena var olika och konstaterade att felet måste vara mätbart stort. Sedan inskrev han regelbundna månghörningar i cirklarna och åstadkom en *motsägelse* genom att stoppa in så många hörn i cirkeln att felet blev mindre än det fel han förutsatt.

Den store mästaren var dock Arkimedes som gjorde både exakta och ungefärliga beräkningar. Den mest kända av hans ungefärliga är uppskattningen $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, men det kan också nämnas att han för att erhålla denna bl.a. utnyttjade olikheten $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ som innebär ett fel som är mindre än en på 40 000. Bland hans exakta kan nämnas förutom förhållandet mellan sfär och cylinder också den exakta uppskattningen av parabelsegmentets yta. Dessutom kan det nämnas att han också lyckades erhålla exakta resultat utanför den rena geometrin genom att t.ex. bevisa att två vikter balanserar varann om föhållandet mellan deras avstånd till balanspunkten är det inverterade värdet av förhållandet mellan deras massor. Han gjorde också exakta beräkningar för tyngdpunkterna för plana figurer och utnyttjade dessa för att undersöka sjösäkerheten hos skepp.

Efter Arkimedes var det främst astronomerna Hipparchos och Ptolemaios som i sina arbeten om konkreta frågor för planetsystemet erhöll de mest slående resultaten. Det kan nämnas att Hipparchos uppskattade solårets längd med ett fel på ungefär $6\frac{1}{2}$ minut. Det bör också nämnas dels att dessa astronomer använde det babyloniska sexagesimalsystemet för sina beräkningar, dels att de också var skickliga instrumentmakare. Matematiskt var deras viktigaste bidrag att de uppfann trigonometrin som kan ses som en systematisk kvantitativ geometri. De bevisade flera av de för oss välkända trigonometriska formlerna och de gjorde noggranna tabeller som de använde för sina astronomiska beräkningar.

Vid ungefär samma tid visade Heron i Alexandria samma förmåga att både bevisa exakta resultat och ge goda närmevärden för lösningar till praktiska problem.

Avslutningsvis bör det påpekas att noggranna mätningar kräver små måttenheter vilket leder till stora antal. Alla beräkningar som rör kontinuerliga storheter kräver därför stor förmåga att räkna med stora tal. Det alexandrinska talsystemet med grekiska beteckningar för naturliga tal och användning av det sexagesimala systemet för bråk var förmodligen det bästa talsystem som någonsin funnits för sådana beräkningar.

4. En ny räknekonst

Trots att de system som under antiken användes för att beskriva kontinuerliga storheter var tillräckliga för praktiska och vissa teoretiska behov, så var de helt otillräckliga för en mer systematisk vetenskap. Utvecklingen av en fysik, som också innehöll en kvantitativ beskrivning av rörelse kom därför att dröja tills ett nytt talbegrepp och en mer symbolisk matematik gjort det möjligt att räkna med de observerade storheterna. Förutsättningen för detta nya talbegrepp var först och främst nya sätt att skriva tal, såväl naturliga tal som bråk.

Som vi sett i tidigare kapitel utvecklades det decimala positionssystemet av hinduerna under 500-talet och det nådde sedan Baghdad under 700-talet. Under de följande århundradena utvecklades alltmer förfinade beräkningsmetoder, som gjorde det möjligt att exempelvis beräkna kvadratrötter med godtycklig noggrannhet. Hinduerna införde även det moderna sättet att skriva bråk, som ett tal ovanför ett annat, även om de överlät åt araberna att införa bråkstrecket. Med hjälp av bråkstrecket kunde araberna addera och subtrahera bråk och därmed utföra alla de räkningar som man tidigare endast kunnat utföra med naturliga tal. Den ökade räkneskickligheten ledde också till nya resultat, såsom 'Umar al-Khayyami's geometriska lösning av tredjegradsekvationen.

KAP.6. Ett mellanspel. (Europa under medeltiden.)

1. Västeuropa efter Rom

För att förstå varför det blev i "den nya tidens" Europa som matematiken, och med den även astronomin, fysiken och överhuvudtaget hela den nya naturvetenskapen kom att att få sin verkliga blomstring, ska vi börja med att återvända till det Västeuropa som uppstod ur spillrorna av det västromerska riket, vid dess slutliga fall år 476. Det som då gick under var resterna av ett en gång välorganiserat jätterike, ett rike med vägar och skolor, städer och byar men också adel, präster, borgare och bönder. Det som gick under med rikets fall var först och främst organisationen och den gemensamma bildning som förenat de ledande klasserna i rikets alla hörn. Det var språkkunskaperna i latin och grekiska, de klassiska författarna, och inte minst den grekiska filosofin och geometrin. Kvar fanns en bondeklass, som visserligen talade latin men som varken kunde läsa eller skriva, och över den en ny härskarklass av germanska erövrare. Det som därutöver återstod och det som trots allt förband det medeltida Europa med dess historiska ursprung var kristendomen.

De kungadömen som på romersk mark etablerades av de segrande germanska stammarna blev kortvariga även om både det västgotiska i Spanien (och södra Frankrike) och det langobardiska i norra Italien bestod i mer än två hundra år. Istället blev det ett germanskt rike vid den nordligaste spetsen av det romerska riket som utan att behöva överge sitt ursprung kunde fylla ut det tomrum som uppstod i ruinerna efter den fallna stormakten. Detta rike var det frankiska som av den merovingiske kungen Clovis utvidgades från att ha bestått av ett obetydligt område vid Rhens nedre lopp till att omfatta förutom större delen av nuvarande Frankrike också stora delar av sydvästra Tyskland. Under de följande århundradena etablerade sig de nya erövrarna som en feodal härskarklass samtidigt som de lärde sig att tala sina undersåtars språk och även om riket (enligt germansk sed) upprepade gånger vid en konungs död delades mellan hans söner, så återuppstod det igen så snart någon av sönerna besegrat sina bröder. Efter att konungamakten försvagats under de senare merovingerna blev det härens överbefälhavare som alltmer blev rikets verklige härskare.

Därigenom kunde en ny ätt, som efter sin mest berömde företrädare Karl den store brukar kallas den Karolingiska, erövra makten i riket. Den som grundlade ättens makt var dock dennes nästan lika berömde farfar Karl Martell (död år 741) som efter att ha blivit överbefälhavare år 711 dels underkuvade ett antal opålitliga vasaller i rikets utkanter och dels erövrade nya länder åt det frankiska riket. Karls viktigaste insats, och den som givit honom en plats i historien, är dock den seger han vann över araberna i slaget vid Poitiers år 732. Även om den historiska betydelsen av detta slag ibland kan ha överdrivits så är det värt att notera att efter år 732 så har araberna aldrig utgjort något egentligt hot mot det kristna västeuropa, medan däremot de kristna alltsedan korstågstiden varit ett ständigt hot mot dem.[56]

Karls son Pippin gjorde visserligen några mindre erövringar, men viktigare för framtiden var dock att de franska kungarna, i samband med strider mellan påven och hans langobardiska grannar, fick en ny roll som påvens viktigaste beskyddare.

[56]Detta hindrar naturligtvis inte att de likaledes islamska turkarna i flera århundraden efter erövringen av Konstantinopel år 1453 utgjorde ett väl så stort hot mot de östra delarna av Europa.

Vid Pippins död år 768 delades riket efter frankisk sed mellan sönerna Karl och Karloman, men sedan Karloman dött redan år 771 blev Karl, som då var 29 år ensam härskare över det frankiska riket.

2. Karl den Store och den karolingiska renässansen

Det är svårt att hitta någon historisk person som haft samma betydelse för Europas vidare historia som Karl den Store, fransmännens Charlemagne. Redan det rike han tillträdde var ett mäktigt rike som förutom dagens Frankrike också omfattade Nederländerna, Belgien, Luxemburg och Schweiz samt södra Tyskland. Under sin långa regeringstid erövrade han bland annat norra Tyskland väster om Elbe nuvarande Österrike och norra Italien. Dessutom säkrade han gränserna mot araberna i sydväst och slaverna i öst genom att anlägga gränsländer, marker, vid rikets gränser. Eftersom även dessa marker så småningom kom att dras in i den västeuropeiska, eller som vi nu ofta säger västerländska kulturkretsen, blev han den som redan för 1200 år sedan utstakade det moderna Europas gränser mot öster och söder.

Vilket intryck han gjorde på sina fiender framgår av att hans namn, Karl, kom att bli det slaviska ordet för konung. Det bör kanske också påpekas att även om Karl själv och hans här ofta och länge befann sig på krigsfot, så fördes krigen som regel utanför det egna rikets gränser. För den egna befolkningen var det därför en lång tid av fred.

Att han också, åtminstone enligt min uppfattning hör hemma i en bok om matematikens utveckling har flera orsaker. Den tydligaste är naturligtvis det intresse han själv visade för sin tids kultur och vetenskap, något som ledde till den (i och för sig kortvariga) kulturella blomstring som eftervärlden kallat den karolingiska renässansen. Till sitt hov i Aachen kallade han inte bara lärda män från sitt rikes alla delar utan även sin tids mest kände lärde, engelsmannen Alcuin av York. Denne blev ledare för den hovskola som sedan blev förebilden för de katedral- och klosterskolor som under de följande århundradena växte fram i hela (det splittrade) riket, och som gav Europa en större andel bildade och utbildade män och kvinnor än någon annan (tidigare eller samtida) kulturkrets.

Han hade också, såsom den frankiska kyrkans överhuvud, makt att ingripa i rent kyrkliga angelägenheter och t.o.m. i tidens trosstrider. Han gav både kyrkan och klostren utökade bildningsuppgifter och spelade en viktig roll i klosterväsendets omvandling. Istället för de tidigaste österländska klostrens betoning av askesen som en väg till individuell frälsning, utvecklades klostren i västerlandet till kulturcentra och barmhärtighetsinrättningar.

Det kan i detta sammanhang kanske påpekas att Karls rike visserligen var vad som i dag kallas för ett multinationellt eller kanske bättre multikulturellt rike, men det var ett rike där det som idag brukar betecknas som en av de grundläggande mänskliga rättigheterna, nämligen trosfriheten, helt saknades. Tvärtom var, förutom kungen själv, den romersk-katolska kyrkan det enda sammanbindande elementet i riket.

En annan, kanske mindre uppenbar anledning till hans betydelse (för Europa och därmed även för matematiken) är rent materiell och berör de för tiden viktigaste näringarna, jordbruket och järnhanteringen. Han uppmuntrade spridningen av det nyligen uppfunna treskiftesbruket och eftersom kärnområdet för riket, den karolingiska ättens egna egendomar, de som gav den rikedom och de inkomster som var förutsättningen för ättens uppstigande till makten, låg mitt i järnhanteringens europeiska centrum så hade han också intresse av den.[57]

[57] Det bör kanske påpekas att en viktig anledning till frankernas krigiska framgångar var

Under de följande århundradena ökade tillgången på järn så mycket att järnets fredliga användning (kanske för första gången i historien) blev viktigare än dess krigiska. Därigenom kunde bättre och billigare jordbruksredskap tillsammans med treskiftesbruket och andra förbättringar av jordbrukstekniken möjliggöra en kraftig ökning av jordbruksproduktionen. Eftersom produktionen ökade mer än böndernas behov av arbetskraft uppstod ett överskott av både mat och människor. Detta ledde i sin tur till att gamla städer kunde växa och nya tillkomma, att nya hantverksyrken uppstod, att handel och samfärdsel utvecklades, eller kort sagt till att ett alltmer differentierat näringsliv växte fram.

År 800 kröntes Karl till (romersk!) kejsare av påven Leo III. Därmed uppstod det som så småningom skulle komma att kallas det "heliga romerska kejsardömet av tysk nation" och som skulle komma att bestå ända till Tysklands nederlag i första världskriget år 1918.

3. Högmedeltidens näringsliv

Trots att både den nya tekniken och befolkningsökningen främst påverkade rikets nordligare delar så var ännu i många århundraden det gamla romarriket den kulturellt ledande delen av Europa, och medan den franske kungen, den tyske kejsaren och påven i Rom under många århundraden var invecklade i ett komplicerat triangeldrama, så fortsatte de italienska städerna i Norditalien obekymrat att växa i rikedom och inflytande. Efter att korstågen och den kristna återerövringen av Spanien brutit den islamska dominansen över sjöfarten på Medelhavet blev hamnstäderna Venedig och Genua rikast i Europa.

De förnäma släkter som nu blev allt rikare hade sedan gammalt kulturella och intellektuella intressen. De nya förmögenheterna investerades i praktfulla palats för att markera släktens storhet och stora påkostade katedraler för att visa stadens (och Guds). Bygget och utsmyckningen av de stora byggnadsverken gav dels arbete åt många men också och kanske viktigare upphov till en kår av yrkesmän av delvis ny typ. De var ofta byggmästare, arkitekter och konstnärer i en person och behövde därför såväl praktiska som teoretiska och estetiska kunskaper.

Med den kommersiella uppblomstringen följde dessutom en snabb utveckling av den administrativa och kommersiella tekniken, (glasögon, papper, dubbel italiensk bokföring, bankväsen, kapitalism) och med den räknekonsten.

Även om Italien genom sitt centrala läge dominerade medelhavshandeln så blev den relativa betydelsen av denna mindre allteftersom handeln på de nordliga haven, Nord- och Östersjön, samt på floderna, främst Rhen ökade. Därigenom växte det fram nordeuropeiska kommersiella centra i Flandern och Nordtyskland som redan från 1200-talet kunde mäta sig med de italienska i makt och rikedom.

Överallt ledde uppkomsten av ett alltmer differentierat näringsliv, av en allt större tillgång på allt billigare järn, och kanske icke minst en allt bättre utbildad befolkning till en snabb teknisk utveckling i stort och i smått. Man lärde sig att använda vattenkraften bättre (för att exempelvis driva masugnsbälgar) och att använda vindkraft för att mala säd, man grävde kanaler och förbättrade vägar för att underlätta sina transporter. Man byggde sjösäkrare båtar med större lastutrymmen, något som förbilligade sjötransporterna. Den goda tillgången på järn och trä gjorde att man också kunde tillverka fler och hållbarare vagnar och kärror vilket dels förbilligade landtransporterna, dels gjorde det möjligt för fler att företa längre resor. Man lärde sig att göra koniska skruvar vilket gjorde att snickarna kunde tillverka starkare och billigare möbler och redskap.

---

att de nästan alltid, tack vare den större tillgången till järn var bättre rustade än sina fiender.

Även om man inte uppfann särskilt mycket nya redskap så medförde det billiga järnet ändå att smeder, snickare och andra hantverkare hade råd att hålla sig med fler och därmed också mer specialiserade verktyg. Allt detta gjorde att medeltidens sista århundraden blev en tid av ständigt ökad produktivitet. Det var vad som idag skulle kallas en ekonomisk tillväxt som inte bara höll jämna steg med befolkningsökningen utan som överträffade den. Det bör kanske också nämnas att den svåraste katastrof som dittills drabbat Europa, nämligen Digerdöden, visserligen slog så hårt mot befolkningen att många trodde att man drabbats av Guds straffdom, men trots detta endast gjorde ett hack i produktionen. Den brist på arbetskraft som följde i dess spår bidrog dessutom till att de som överlevde ofta fick bättre betalt för sitt arbete.

4. och skolväsen

Den utveckling av näringslivet som jag beskrev i det förra avsnittet hängde nära samman med en ökande tillgång på kunnigt folk. Även om behovet av högt utbildade inte var alltför stort så behövdes det både skriv- och icke minst räknekunniga människor på många håll. Kungar och furstar behövde dem för sin administration, kyrkor och kloster för att exempelvis hålla reda på påsken och rika köpmän för att förvalta sina förmögenheter. Även om det var den världslige härskaren Karl den Store som tog det första initiativet så blev det kyrkan som kom att stå för verksamheten och under århundradena efter Karls död så växte det upp skolor vid ett antal kloster och katedraler. Verksamheten växte och utbildningsnivån steg. Vid katedralskolan i Chartres, söder om Paris, nådde den under 1100-talet en nivå som var inte överträffades förrän universitetet i Paris nått sin fulla mognad under det följande århundradet.

Redan år 1088 hade dock det första steget mot en ännu högre utbildningsnivå tagits i och med att en grupp studenter i Bologna anställde ett antal lärare för ett *studium generale*. Detta brukar beskrivas som den händelse varmed det första universitetet grundades. Sedan tillkom universitet i Paris vid mitten av 1100-talet, i Oxford 1167, i Salerno 1173 och sedan ungefär ett nytt universitet vart tionde år under 1200-talet, vart femte år under 1300-talet och vart fjärde under 1400-talet. Även om universiteten inte alltid var mycket mer än prästseminarier, (och även om den akademiska friheten minskade mot medeltidens slut) så innebar den snabba utvecklingen att Europa redan mot slutet av medeltiden hade ett oerhört mycket större antal högutbildade än någon annan jämförbar kultur. Dessutom utgjorde universitetslärarna en av de grupper av fria intellektuella som under de följande århundradena skulle i grunden förändra människans syn på sig själv och världen omkring sig.

Mot slutet av medeltiden, samtidigt som det sista som i öster återstod av det romerska riket höll på att gå under och portugisiska sjöfarare börjat göra upptäcktsfärder längs Afrikas kuster (och baskiska fiskare börjat fiska i vattnen utanför New Foundland), så kom den uppfinning som skulle komma att revolutionera det intellektuella livet i Europa, nämligen boktryckarkonsten.

Tack var denna blev böcker snart så billiga att ”alla” fick råd att lära sig att läsa, och den var därmed förutsättningen för den höjning av den allmänna utbildningsnivån som skulle göra västra Europa till den tekniskt och ekonomiskt och så småningom också politiskt dominerande delen av världen.

5. Det grekiska arvet. I

Även om det brukar påstås att den västerländska vetenskapen och filosofin uppstod i Grekland under det sista årtusendet före vår tideräkning så är detta inte riktigt sant. Det är förvisso sant att de grekiska filosoferna genomförde något som idag skulle kallas för en vetenskaplig revolution, men det var en revolution inom en österländsk filosofisk tradition och åtminstone fram till 1200-talet så låg vår kulturs intellektuella tyngdpunkt öster om eller möjligen i östra delen av Medelhavet.

Det var i Egypten, Mesopotamien, Syrien och Mindre Asien som den hellenistiska traditionen levde vidare, det var i Sinais öken som eremit- och klosterväsen uppstod och det var på kyrkomöten i mindre Asien som kyrkans trossatser fastställdes. Det var de kristna i Syrien som översatte de grekiska filosofernas och matematikernas verk till arabiska, och därigenom dels räddade dessa åt eftervärlden och dels möjliggjorde den islamska guldåldern under kalifatet i Bagdad på 8 och 900-talen. Det var inte förrän (vanligen intellektuellt ointresserade) turkiska stammar under 900-talet fick ett dominerande inflytande vid kalifernas hov i Bagdad som det kulturella livet i östra medelhavsområdet stelnade och det var först då som nya kulturcentra i de västligare delarna av den islamska världen såsom Palermo på Sicilien och Toledo i Spanien fick en större betydelse.

Det var tack vare att muslimerna ända sedan Muhammed tolererat de kristna såsom "bokens folk" som det romersk-katolska Europa på Sicilien och i Spanien lärde känna den islamska vetenskapen och därmed också den grekiska. Det var där som kristna munkar och andra lärde under 1100-talet översatte skrifter av Aristoteles och Platon, Euklides och Ptolemaios till latin.

Dessa skrifter innehöll tankar och tänkesätt som var nya för västerlandet och som skakade den lärda världen. Ända sedan Augustinus på 400-talet hade lärt att tron på Gud var viktigare än vetandet så hade tänkandet underordnats den kristna tron. Med Aristoteles filosofi fick man nu för första gången en rationell världsbild och ett filosofiskt system som omfattade allt från livets begynnelse och ända ut till kosmos yttersta sfärer. Det Europa nu fick del av var ett intellektuellt arv som man hade väntat länge på, och som man nu var mogen att ta emot. Vid universitet, vid furstliga hov och t.o.m. i klostren satt det lärda män (och även kvinnor) som läste och diskuterade hedniska skrifter författade av hedniska filosofer. Den uppgift som de ledande tänkarna i västerlandet snabbt tog itu med blev att förena Aristoteles filosofi med den kristna läran. Den syntes som skapades av främst THOMAS AB AQUINO (1225-1274) kom att kallas *skolastiken* och dominerande under 400 år det vetenskapliga tänkandet i västerlandet. Alla lärda hade i skolor och vid universitet lärt sig skolastisk filosofi och allt vad de skrev och tänkte var påverkat av Aristoteles.

Det grekiska arvet innehöll dock mycket mera än bara Aristoteles filosofi. Det innehöll Euklides geometri (för första gången kunde västerlänningar läsa hela Elementa) och Appolonius kägelsnitt, den alexandrinska astronomin (vars främsta verk Ptolemaios 'Almagest', blev känt i västerlandet under detta, sitt arabiska namn), Platons idélära och mycket annat som kunde varit värt att nämna.

6. Det grekiska arvet. II. Skolastik och vetenskap

Som filosofiskt system utgjorde skolastiken en syntes av Aristoteles filosofi som beskrev människans och jordens läge i universum och kristendomens lära om det som låg utanför och över det som Aristoteles beskrev. Även om Aristoteles filosofi naturligtvis var hednisk såtillvida som att Gud inte hade någon särskild roll ens som skapare, så var den i många avseenden tacksam att förena med kristendomen. Först och främst låg jorden orubbligt stilla i universums centrum, medan månen, jorden, planeterna och stjärnorna satt på sfärer som med olika hastigheter roterade runt jorden. Dessutom var systemet mekaniskt och för att driva maskineriet så behövdes det någon (den förste röraren) som hela tiden vred på den yttersta sfären, fixstjärnesfären. Eftersom det var naturligt att identifiera den förste röraren med Gud, så var detta naturligtvis en världsbild som dels passade väl ihop med den kristna läran, dels tilltalade alla dem som gärna vill se människan inte bara som jordens herre, utan även som universums.

Trots att skolastiken snart blev kyrkans officiella filosofi och därmed fick en auktoritet som knappast skulle ha tilltalat Aristoteles så blev den inte så hämmande för den vetenskapliga utvecklingen som dess vedersakare några århundraden senare lät påskina. Först och främst innebar nämligen kyrkans accepterande av Aristoteles att det även för goda kristna blev tillåtet att läsa inte bara Aristoteles, utan även andra grekiska och arabiska författare, och för den som läste Aristoteles egna verk var det alldeles tydligt att han för sin del inte skulle ha erkänt ens sig själv som en orubblig auktoritet. Ett utmärkande drag för hans filosofi var ju nämligen att verkligheten var den enda auktoritet som han accepterade. Dessutom innebar skolastikens starka betoning av logiken att den också kunde kritiseras med logiska argument. Det bör dessutom påpekas att även om kyrkan föredrog Aristoteles beskrivning av universum så visste alla de som studerade stjärnhimlen att det var Ptolemaios Almagest (och inte Aristoteles fysik) som gav den exaktaste beskrivningen, vilket innebar att man i den lärda världen redan från början visste att skolastikens världsbild inte kunde vara helt sann.

En annan svag punkt i skolastiken som man övertagit direkt ifrån Aristoteles var rörelseläran. Denna hade utarbetats utgående från erfarenheter av system med små krafter och stor friktion och dessa beskrevs väl, däremot var den helt inadekvat för att förklara exempelvis kaströrelser. De tidiga europeiska naturvetenskapsmännen kom också att till stor del studera just rörelser och en av de första vetenskapliga teorier som uppstod var en ny rörelselära grundad på begreppet *impetus*. Impetusteorin är intressant också i det avseendet att den var betydligt mer kvantitativ och matematisk än Aristoteles. Några namn som bör nämnas i detta sammanhang är fransmännen Jean Buridan och (den mest betydande matematikern) Nicole Oresme, samt engelsmannen Thomas Bradwardine. Flera av (främst Oresmes) arbeten kom senare att spela en stor roll för Galileis tidiga forskning.

7. Det grekiska arvet. III. Praktisk geometri

Även om Aristoteles filosofi var den del av det grekiska arvet som mest genomgripande förändrade tänkandet i den lärda världen, så var det matematiken som först kom att påverka människornas vardag. När man redan på 1100-talet började översätta Euklides Elementa till latin så fick detta ett nästan omedelbart genomslag vid universiteten och ett något långsammare vid skolor på lägre nivå. Även om det var få som förstod de geometriska bevisen så bidrog den ökande geometriundervisningen i skolorna ändå till att många fick en fördjupad och kanske framför allt mer medveten rumsuppfattning. Detta bidrog också till ett uppvaknande intresse för den geometriska optiken som hade studerats av alexandrinska matematiker, bl.a. Euklides och Appolonius. Eftersom dessa inte hade tillgång till ofärgat glas hade de dock svårigheter med att studera ljusets brytning så att deras resultat handlade huvudsakligen om ljusets *reflektion* i plana och buktiga ytor. Det kan exempelvis nämnas att kägelsnittens optiska egenskaper[58] var kända redan under antiken. Det viktiga var dock inte de resultat som de antika matematikerna uppnått utan det var deras metod att tolka resultatet av praktiska undersökningar såsom geometriska satser, och att härleda komplicerade samband ur enkla lagar. När denna metod återupptogs av lärda män såsom engelsmannen Roger Bacon (1214-1294), främst verksam vid universitetet i Paris, så fanns det redan en primitiv glasindustri, vilket innebar att man inte bara kunde blåsa glas, utan även skära och slipa det. När de nygamla idéerna nådde till de praktiskt arbetande glasmästarna så upptäckte dessa snart vilka möjligheter deras hantverk hade och de lärde sig först att tillverka förstoringsglas, och kort därefter även glasögon. De första glasögonen lär ha tillverkats i Norditalien vid slutet av 1200-talet och inom några årtionden kunde förmögna borgare i hela Europa köpa sig egna glasögon. Eftersom dessa förlängde de läskunnigas aktiva liv med kanske 30%, så bidrog även de på sitt sätt till ökningen av läskunnigheten i Europa.

Det nya intresset för praktisk geometri spred sig även till konstnärerna som först upptäckte perspektivet och snart också började lära sig att utnyttja det för att åstadkomma ett nytt djup i sina tavlor. De första ansatserna kom på 1300-talet och i mitten på 1400-talet var principerna helt klara för de ledande konstnärerna.

[58] Ljus som strålar från en brännpunkt reflekteras så att det går genom den andra.

Två århundraden senare ledde samma idéer till uppkomsten av en ny form av geometri, nämligen det som idag kallas projektiv geometri.

8. Praktisk aritmetik

Den tekniska och ekonomiska utvecklingen ledde inte bara till nya tillämpningar av den grekiska geometrin, utan så småningom också till nya räknefärdigheter. Vi vet att *siffrorna* kom till Europa redan före år 1000, men att de inte fick någon spridning förrän efter korstågen. Den främsta anledningen var naturligtvis att de ännu inte fyllde något behov. Så småningom började dock ett sådant behov att uppstå. Anledningen var främst att handeln över Medelhavet dels togs över av de italienska handelsstäderna och dels ökade kraftigt, till stor del beroende på den ekonomiska och tekniska utvecklingen i Europa. Med den ökande handeln ökade behovet av pengar och därmed av räkning. Detta ledde dels till uppkomsten av ett kapitalistiskt ekonomiskt system, dels till nya bokföringsmetoder, den berömda dubbla bokföringen.

Allt detta krävde räknande och även om skepsisen mot de nya siffrorna till en början var stor så kom de så småningom att användas allt mer. En viktig anledning till detta var ett framväxande oöverskådligt penningväsen, som ledde till oräkneliga växlingsaffärer, för även om de gamla romerska siffrorna och de tillhörande räknebrädorna var utmärkta för addition och enkla multiplikationer, så hade de svårt att klara dessa nya räkningar. Under en tid användes förmodligen arabiska siffror för uträkningar och romerska för att dokumentera resultaten, men så småningom tog de arabiska över helt. Detta var dock en konst för de invigda och under 13- och 14-hundratalen uppstod ett nytt yrke, räknemästaren. I Italien kallades dessa nya yrkesmän för *cossister* (av *cosa*, sak, som var benämningen för den obekanta i en ekvation) och kom under ett par århundraden att spela en viktig roll för utvecklingen.

Ett bevis för den betydelse som räknekonsten fått under slutet av medeltiden var det faktum att bland de första tryckta böckerna fanns flera räkneläror. Den första av dessa är den berömda *Treviso*-aritmetiken som trycktes redan år 1478. Innan århundradet var slut fanns det minst 5 tryckta räkneläror från olika hörn av Europa, något som inte bara bidrog till att öka räknekunnigheten utan också till att förändra själva matematiken.