UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Bo Styf, 471 3192, 0707-253107

Prov i matematik
Baskurs i matematik
2008–05–17

Skrivtid: 09.00 – 14.00. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng. Påbörja varje uppgift på nytt papper och skriv endast på papperets ena sida.

1. (a) Avgör om $2^{(\log_2(3)+\log_3(18)-\log_9(4))}$ är ett heltal.

(b) Lös ekvationen $\log_3(9x) - \log_9(4-3x) = 2$

2. Lös olikheten $|2x+1| < 3x+4$.

3. (a) Lös ekvationen $1 + 2\cos(2x) = 0$

(b) Lös ekvationen $\sin^2(2x) + 3\cos^2(2x) = 2$.

4. (a) Ange en polär representation av talen $z = (-3\sqrt{3}+3i)(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)$ och $w = \dfrac{-3\sqrt{3}+3i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}$.

(b) Lös ekvationen $z^4 + 81 = 0$.

5. Visa att $n! > 3^n$, för varje heltal $n > 6$.

6. (a) På hur många sätt kan fem apelsiner fördelas på tre personer, så att ingen blir helt utan?

(b) På hur många sätt kan tre apelsiner och tre bananer fördelas på tre personer, så att ingen får alla sex frukterna?

7. (a) Beräkna kvoten och resten då $x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 9$ divideras med $x^2 - 4$.

(b) Skriv, t ex genom att utnyttja (a), polynomet $x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 20$ som en produkt av förstagradspolynom.

8. (a) Ange en ekvation för ellipsen som har centrum i origo, går genom $(0, -3)$ och har en brännpunkt i $(3, 0)$.

(b) En parabel har ekvationen $4y = (x-2)^2$. Bestäm parabelns brännpunkt och styrlinje.

Svar till tentamen i 2008–05–17

1. (a) Vi har $2^{\log_2(3)} = 3$ och $\log_3(18) - \log_9(4) = \log_3(2) + \log_3(9) - \log_3(4)/2 = 2\log_3(3) = 2$. Talet är därför $3 \cdot 2^2 = 12$, alltså ett heltal.

(b) Då $\log_3(9x) = \log_3(9) + \log_3(x) = 2 + \log_3(x)$ och $\log_9(4 - 3x) = \log_3(4 - 3x)/2$ kan ekvationen skrivas $2\log_3(x) = \log_3(4 - 3x)$, dvs $\log_3(x^2) = \log_3(4 - 3x)$. Alltså ska både x och $4 - 3x$ vara positiva och $x^2 = 4 - 3x$. Andragradsekvationen kan skrivas $0 = x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$. Rötterna är $x = 1$ och $x = -4$. Den andra roten är falsk så enda lösningen är $x = 1$.

2. Varje lösning till den givna olikheten löser också den kvadrerade olikheten $(2x + 1)^2 < (3x + 4)^2$, vilken hyfsas till $0 < x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$. Lösningen består alltså av alla x för vilka $x + 3$ och $x + 1$ har samma tecken, vilket inträffar då $x + 1 > 0$ eller $x + 3 < 0$. De sistnämnda lösningarna måste dock förkastas ty för dessa gäller att $3x + 4 < 3x + 9 < 0$.
Alternativt gör vi en fallindelning: Låt $v = 2x + 1$, $h = 3x + 4$. Olikheten kan skrivas $|v| < h$. Om $h \leq 0$, dvs $x \leq -4/3$, saknas lösningar. Om $-4/3 < x \leq -1/2$ gäller $|v| = -v$ så olikheten kan skrivas $-v < h$ eller $0 < v + h = 5x + 5$, med lösningen $-1 < x \leq -1/2$. Om, slutligen, $-1/2 \leq x$ gäller $|v| = v$ så olikheten kan skrivas $v < h$ eller $0 < h - v = x + 3$, vilket alltid är sant. Sammantaget har därför olikheten $|v| < h$ lösningen $x > -1$.

3. (a) Ekvationen kan skrivas $\cos(2x) = -\dfrac{1}{2}$. Alltså har vi $2x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n$ så lösningarna är $x = \pm\pi/3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Trigonometriska ettan ger $2 = 1 + 2\cos^2(2x) = 1 + 1 + \cos 4x$, dvs $\cos(4x) = 0$. Lösningarna ges därför av $4x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$. Alltså $x = \dfrac{\pi}{8} + n\dfrac{\pi}{4}$.

4. (a) Vi har $c = -3\sqrt{3} + 3i = 3(-\sqrt{3} + i) = 6e^{\frac{5\pi}{6}i}$ och $d = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$, $\Rightarrow$

$$z = cd = 12e^{\pi\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{4}\right)i} = 12e^{\frac{13\pi}{12}i}, \qquad w = \frac{c}{d} = \frac{6}{2}\, e^{\pi\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right)i} = 3e^{\frac{7\pi}{12}i}$$

(b) Låt $z = r\,e^{i\theta}$. Då $-81 = 81e^{i\pi}$ kan ekvationen skrivas $r^4 e^{i4\theta} = 81e^{i\pi}$, $\Rightarrow r^4 = 3^4$, $4\theta = \pi + 2\pi n$. $\Rightarrow r = 3$, $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n$. Fyra konsekutiva n-värden, exempelvis $n = -1,\ 0,\ 1,\ 2$, ger de fyra rötterna.

5. Basfallet, $n = 7$: $7! = 5040 > 2187 = 3^7$. Induktionssteget: Antag att $m > 6$ och $m! > 3^m$. Av antagandet följer att $(m+1)! = (m+1)m! > (m+1)3^m > 7 \cdot 3^m > 3 \cdot 3^m = 3^{m+1}$ och beviset är klart enligt induktionsprincipen.

6. (a) Vi ger först en apelsin till var och en, så att ingen blir utan. De återstående två apelsinerna kan sedan fördelas hur som helst: En möjlighet är att ge båda till en person. Det kan göras på tre sätt. Den andra möjligheten är att ge en apelsin vardera till två av personerna. Det kan också göras på tre sätt. Alltså finns det $3 + 3 = 6$ sätt att fördela apelsinerna.

(b) En fördelning av tre apelsiner (eller bananer) på tre personer kan beskrivas av en sekvens med tre 0:or och två 1:or. Exempelvis betyder 01100 att den första personen fick en apelsin, den andra personen fick ingen alls medan den tredje personen fick två apelsiner.

Det finns därför $\dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ sätt att fördela de tre apelsinerna och på samma sätt 10 sätt att fördela bananerna. Av multiplikationspricipen följer att det finns $10 \cdot 10 = 100$ sätt att fördela frukterna, om de får fördelas godtyckligt. I tre fall får dock en person alla sex frukterna så det efterfrågade antalet är 97.

7. (a) En polynomdivision ger

$$\frac{x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 9}{x^2 - 4} = x^2 - 4x - 5 - \frac{11}{x^2 - 4}$$

eller

$$x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 9 = (x^2 - 4x - 5)(x^2 - 4) - 11$$

så kvoten är $x^2 - 4x - 5$ och resten är -11.

(b) Av ovanstående division framgår att $x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 20 = (x^2 - 4x - 5)(x^2 - 4)$. Ekvationen $x^2 - 4x - 5 = 0$ har rötterna $x = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$ och ekvationen $x^2 - 4 = 0$ har rötterna $x = \pm 2$. Av detta följer att $x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 20 = (x-5)(x+1)(x-2)(x+2)$.

8. (a) Givna data medför att $b = c = 3$, $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 18$. En ekvation för ellipsen är därför $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

(b) Parabeln med brännpunkten $(0, f)$ och styrlinjen $y = -f$ har en ekvation $4fy = x^2$. Av detta inser vi att den givna ekvationen beskriver en parabel med brännpunkt i $(2, 1)$ och styrlinjen $y = -1$.