Dugga 15/9/2007 Exempellösning

1. Notera att $x^2+1>0$. Därmed:

$$\frac{x^2-x+2}{x^2+1}<2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-x+2 < 2(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-x+2 < 2x^2+2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < x^2+x = x(x+1)$$

Brytpunkterna, nollställena till $x(x+1)$, är 0 och -1. Ställ upp en teckentabell:

x		-1		0	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Från teckentabellen ser vi nu att x är en lösning till olikheten om $x<-1$ eller om $0<x$.

Dugga 15/9/2007 Exempellösning

2. För att bli av med absolutbeloppet delar vi upp i fall, beroende på ~~tecknet~~ om x^2-1 är större, mindre eller lika med 0.

<u>Fall I</u>: $x^2-1=0$, dvs. $x=1$ eller $x=-1$.
Olikheten blir då $0<1$, vilket är sant, så $x=1$ och $x=-1$ är båda lösningar.

<u>Fall II</u>: $x^2-1>0$

Vi avgör först vad detta innebär för x. Eftersom $x^2-1=(x+1)(x-1)$ har vi brytpunkter vid 1 och vid -1. Teckentabell:

x		-1		1	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi ser alltså att i det här fallet gäller antingen $x<-1$ eller $1<x$.
Olikheten blir i det här fallet

$$x^2-1<1$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2<2$$
$$\Leftrightarrow \quad |x|=\sqrt{x^2}<\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$$

Tillsammans med vad vi redan visste får vi att x är en lösning om $-\sqrt{2}<x<-1$ eller $1<x<\sqrt{2}$.

<u>Fall III</u> $x^2-1<0$

Enligt teckentabellen ovan innebär detta att $-1<x<1$.
Olikheten blir här

$$-(x^2-1)=1-x^2<1$$
$$\Leftrightarrow \quad -x^2<0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0<x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 0<|x|$$
$$\Leftrightarrow \quad x\neq 0.$$

2. (forts.)

Detta innebär att x är en lösning till olikheten om $-1 < x < 0$ eller $0 < x < 1$.

Från alla tre fallen får vi nu att x är en lösning till olikheten om:

$-\sqrt{2} < x < -1$ eller $x = -1$ eller $-1 < x < 0$ eller $0 < x < 1$ eller $x = 1$ eller $1 < x < \sqrt{2}$,

det vill säga, om:

$-\sqrt{2} < x < 0$ eller $0 < x < \sqrt{2}$.

Dugga 15/9/2007 Exempellösning

3. Vi ser genast att $x>0$, för annars är inte $\log_2 x$ definierat. För positiva x gäller

$$\log_2(x+1) - 2\log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) = 2\log_2 x$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_2(x+1)} = 2^{2\log_2 x} = \left(2^{\log_2 x}\right)^2 \quad \left[\text{eftersom } a^{bc} = (a^b)^c\right]$$

$$\Leftrightarrow x+1 = x^2 \quad \left[\text{eftersom } 2^{\log_2 a} = a\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Vi löser andragradsekvationen genom kvadratkomplettering:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

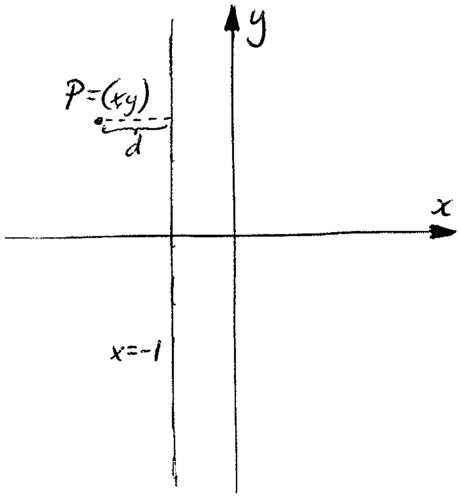
$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Eftersom $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ är detta en falsk lösning; däremot är $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$, och alltså en lösning.

<u>Svar</u>: Ekvationen har lösningen $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Dugga 15/9/2007 Exempellösning

4. a)



Givet punkten $P=(x,y)$ så är det kortaste avståndet till linjen $x=-1$ det horisontella, dvs. i x-led. Avståndet är

$$d = |x-(-1)| = |x+1|$$
$$\left(= \sqrt{(x+1)^2}\right).$$

b) Givet punkten $P=(x,y)$ är avståndet från P till linjen $x=-1$ precis $|x+1|$ enligt (a). Avståndet från P till punkten $(\tfrac{1}{2}, 0)$ är

$$\sqrt{(x-\tfrac{1}{2})^2 + (y-0)^2}$$

enligt avståndsformeln.

Villkoret i uppgiften säger nu att

$$|x+1| = 2\sqrt{(x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2},$$

och eftersom båda dessa uttryck alltid är ≥ 0 är detta ekvivalent med

$$|x+1|^2 = 4\left((x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2\right) \quad \text{[kvadrera båda sidor]}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 4\left((x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+1 = 4\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4} + y^2\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+1 = 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2$$
$$\Leftrightarrow 0 = 3x^2 - 6x + 4y^2$$

Kvadratkomplettera nu för x:

$$\Leftrightarrow 3(x^2-2x) + 4y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3\left((x-1)^2 - 1\right) + 4y^2 = 0$$

Dugga 15/9/2007 Exempellösning

4. (forts.)

$$\Leftrightarrow \quad 3(x-1)^2 - 3 + 4y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(x-1)^2 + 4y^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{3}/2\right)^2} = 1$$

Vi ser att detta är ekvationen för en ellips med centrum $(1,0)$.