

1. (a) Ange en ekvation för den räta linjen genom punkterna $(-1, 1)$ och $(3, -2)$.

Svar. Med tvåpunktsformeln får vi ekvationen $y = 1 + (-2 - 1)/(3 + 1)(x - 1) = -(3/4)x + 1/4$.

- (b) Ange en ekvation för cirkeln med centrum i $(1, -2)$ och radien 3.

Svar. Vi får ekvationen $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$.

- (c) Visa att ekvationen $x^2 + 2x + 3y^2 - 4y = 6$ definierar en ellips och bestäm dess centrum och halvaxlar.

Svar. Kvadratkomplettering ger

$$6 = (x^2 + 2x) + 3(y^2 - (4/3)y) = (x + 1)^2 - 1 + 3(y - 2/3)^2 - 4/9$$

Alltså $(x + 1)^2 + 3(y - 2/3)^2 = 6 + 1 + 4/3 = 25/3$, vilket betyder en ellips med centrum i $(-1, 2/3)$ och halvaxlarna $a = 5/\sqrt{3}$, $b = 5/3$.

2. Lös ekvationen

$$\log_3(1 - x) = \log_9(2x + 6)$$

Svar. Sätt $u = \log_3(1 - x) = \log_9(2x + 6)$. Då gäller

$$2x + 6 = 9^u = (3^u)^2 = (1 - x)^2 = x^2 - 2x + 1,$$

vilket ger $x^2 - 4x - 5 = 0$, $x = 2 \pm \sqrt{4 + 5} = 2 \pm 3$, d.v.s $x = 5$ eller $x = -1$.
Prövning visar att den första roten är falsk. Den enda lösningen är därför $x = -1$.

3. Lös olikheten

$$\left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| > 2$$

Svar. Genom kvadrering fås den ekvivalenta olikheten $4(x - 1)^2 < (x + 1)^2$, $3x^2 - 10x + 3 < 0$, $x^2 - (10/3)x + 1 < 0$, som kan omskrivas till $3(x - 3)(x - 1/3) < 0$. Produkten av två tal är negativ precis då det minsta talet är negativt och det största talet är positivt. Alltså gäller att $x - 3 < 0 < x - 1/3$ d.v.s $1/3 < x < 3$. Men $x = 1$ är här ett otillåtet värde så lösningen blir att $1/3 < x < 1$ eller $1 < x < 3$.

4. (a) Vilket samband mellan b och c måste gälla då ekvationen $x^2 + 2bx + c = 0$ har en dubbelrot, det vill säga precis en lösning?

Svar. Enligt p, q -formeln har ekvationen lösningarna $x = -b \pm \sqrt{b^2 - c}$, så vi har en dubbelrot precis då $c = b^2$.

- (b) Bestäm alla räta linjer genom punkten $(0, 3)$ som tangerar enhetscirkeln

$$x^2 + y^2 = 1$$

Svar. En (ej lodrät) linje genom $(0, 3)$ har ekvationen $y = kx + 3$. Linjen skär cirkeln i punkter där

$$1 = x^2 + y^2 = x^2 + (kx + 3)^2 = (k^2 + 1)x^2 + 6kx + 9$$

eller $x^2 + 2(3k)/(k^2 + 1)x + 8/(k^2 + 1) = 0$. Linjen tangerar cirkeln om och endast om denna ekvation har en dubbelrot, vilket inträffar då $9k^2 = 8(k^2 + 1)$, $k^2 = 8$, $k = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$. De sökta linjerna är alltså $y = \pm 2\sqrt{2}x + 3$.