Kompletterande övningar på induktion

1. Visa att $\frac{(2\,n)!}{2^n}$ är ett heltal om $n \in \mathbb{N}$. Anmärkning: $k!$ betecknar produkten av de k inledande positiva heltalen.

2. Finn en sluten formel för summan av de n första udda positiva heltalen, och visa med induktion att din formel stämmer.

3. Visa att $6 \mid (8^n - 2^n)$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

4. Visa att olikheten $n! > 2^n$ gäller för alla heltal ≥ 4.

5. Visa att alla heltal som är större än eller lika med 8 kan skrivas som en summa av treor och femmor.

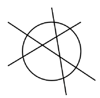
6. Visa att alla heltal som är större än eller lika med 14 kan skrivas som en summa av treor och åttor.

7. (För den teoretiskt intresserade.) Givet två positiva heltal m och n, kan man fråga sig om det finns ett positivt heltal N sådant att alla heltal $\geq N$ kan skrivas på formen $a\,n + b\,m$. Ett nödvändigt villkor är uppenbarligen att m och n saknar gemensam delare. Men räcker detta, och kan man få ett uttryck för N i termer av m och n?

8. Definiera de harmoniska talen H_k genom att sätta $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$. Visa att $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

9. Delning av en tårta

Bestäm en sluten formel för maximala antalet delar som kan fås av en tårta om man gör n snitt med en vass tårtspade "rakt igenom tårtan". Ge ett induktionsbevis för att den slutna formeln stämmer. LEDNING Hitta en rekursionsformel.

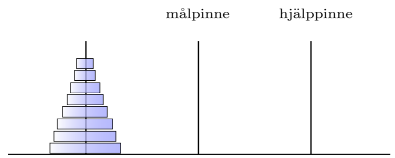


10. Bestäm en sluten formel för summan av de n första triangeltalen. Ge ett induktionsbevis för att din slutna formeln stämmer. Anmärkning: Det p:te triangeltalet brukar definieras av $0 + 1 + 2 + \ldots + p = \frac{1}{2}\,p\,(p+1)$.

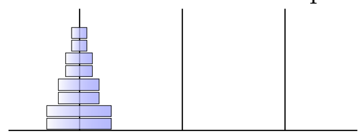
11. Antag att man vill veta ifall ett givet telefonnummer finns med i en lista av 2^n st telefonnummer. Visa att om listan är sorterad, så kan man reda ut problemet efter att ha jämfört det givna numret med högst $n+1$ stycken av listans nummer. LEDNING Hitta en rekursiv sökalgoritm som

12. Hanoi-tornen. I slutet av 1800-talet presenterade den franske matematikern Edouard Lucas ett slags matematiskt pussel som gick ut på att - under iakttagande av vissa spelregler (se nedan) - förflytta ett antal olika stora skivor, som låg travade på varandra över en pinne. Efter en lyckad genomförd förflyttning, skulle skivorna ligga travade över en annan pinne (målpinne) i samma ordning som från början, dvs. i storleksordning med den största skivan underst. En tredje pinne (hjälppinne) skulle finnas tillhands som mellanlandningspinne. Bestäm både en rekursiv och en sluten formel för det minsta antalet enskilda skivförflyttningar som fordras för att på nämnda sätt flytta ett torn med n skivor.

Spelregler: Skivorna skall flyttas en i taget, från pinne till pinne. Och ingen skiva tillåts någonsin att hamna ovanpå en mindre skiva eller utanför de tre pinnarna.



13. Hanoi-torn med par av identiska skivor. I följande variant på pusslet med Hanoi-tornen förekommer par av identiska skivor.



F.ö. gäller samma regler som i 12. Bestäm både en rekursiv och en sluten formel för det minsta antalet enskilda skivförflyttningar som fordras för att flytta ett torn med n stycken skivpar från en pinne till en annan, om

a) de två identiska skivorna av varje storlek tillåts hamna i omvänd ordning i den slutgiltiga placeringen i förhållande till den ursprungliga,

b) två identiska skivor *aldrig* tillåts hamna i omvänd ordning i den slutgiltiga placeringen.