

Några exempel på induktionsbevis.

Vi börjar med att visa att

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1} \text{ för varje heltal } n \geq 1.$$

Låt $p \geq 1$ vara ett heltal. Vi inför beteckningen $P(p)$ (utläses "påstående nummer p ") för följande påstående:

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{p}{2p+1}.$$

Vi kan skriva $P(p)$ utan summatecken på följande vis:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4p^2 - 1} = \frac{p}{2p+1}. \quad (\text{Vänsterledet är en summa av } p \text{ stycken termer})$$

Vår uppgift är att bevisa att $P(p)$ är sant oavsett värde på det positiva heltal p . Vi skriver upp $P(p)$ för $p = 1, 2, 3$.

$P(1)$ är påståendet

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1},$$

$P(2)$ är påståendet

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{2 \cdot 2 + 1},$$

$P(3)$ är påståendet

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = \frac{3}{2 \cdot 3 + 1}.$$

Vi kan kontrollera att dessa tre påståenden är sanna genom enkel bråkräkning, men för att visa att $P(p)$ är sant inte bara för $p = 1, 2, 3$ utan för *alla* positiva heltal behöver vi en annan metod. Vi blir ju aldrig färdiga om vi kontrollerar ett påstående i taget.

Metoden är att visa följande två saker, och sedan föra ett induktionsresonemang:

- $P(1)$ är ett sant påstående.
- Implikationen: $P(p)$ är sant $\implies P(p+1)$ är sant gäller för $p = 1, 2, 3, \dots$

Dessa två punkter brukar kallas för "bassteget" respektive "induktionssteget". Ett annat sätt att skriva induktionssteget är: Vart och ett av (de oändligt många) påståendena $P(2), P(3), P(4), \dots$ är en direkt konsekvens av föregående påstående. Ytterligare en formulering skulle kunna vara: Om ett av påståendena $P(1), P(2), P(3), \dots$ är sant, så är även nästföljande påstående sant.

Hur vi ska bära oss åt för att visa båda dessa saker kommer vi till strax, men först konstaterar vi att om båda är giltiga så följer det att $P(p)$ är sant för *varje* positivt heltal p : $P(1)$ är

naturligtvis sant på grund av bassteget. Hittills vet vi alltså att $P(1)$ är sant. På grund av induktionssteget är $P(2)$ en konsekvens av $P(1)$, dvs. om $P(1)$ är sant, så är även $P(2)$ sant. Men vi vet ju att $P(1)$ är sant, alltså även $P(2)$. Vi har precis avslutat det första induktionssteget. Nu fortsätter vi samma resonemang om och om igen.

Vi har hittills bevisat att både $P(1)$ och $P(2)$ är sanna. Vad kan vi då säga om $P(3)$? Vi använder induktionssteget på nytt. Enligt det så är $P(3)$ en konsekvens av (följer av) $P(2)$. Eftersom vi vet att $P(2)$ är ett sant påstående måste alltså även $P(3)$ vara sant. Nu vet vi att $P(1)$, $P(2)$, och $P(3)$ är sanna. Med risk för att bli långrandiga använder vi induktionssteget på nytt för att visa att $P(4)$ är sant. Det säger ju att $P(4)$ en direkt konsekvens av $P(3)$, och eftersom vi nyss bevisat att $P(3)$ är sant, kan vi lägga till $P(4)$ till vår samling av sanna påståenden. Vi har hittills visat att $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, och $P(4)$ är sanna. Den här proceduren kan naturligtvis fortsättas för att visa att $P(5)$ är sant. Vi använder hela tiden induktionssteget för att lägga ytterligare ett påstående till vår lista av sanna påståenden.

Uppgiften var att visa att $P(p)$ är sant för *varje* positivt heltal p . Hur följer det till exempel av vårt resonemang att $P(149)$ är sant? Jo, efter att ha använt induktionssteget en gång vet vi att $P(1)$ och $P(2)$ är sanna; använder vi det en gång till vet vi att $P(1)$, $P(2)$, och $P(3)$ är sanna. På samma sätt vet vi, efter att ha använt det 148 gånger, att vart och ett av $P(1)$, $P(2)$, $\dots$, $P(149)$ är sant. Det är inte något speciellt med talet 149, och vi inser att resonemanget fungerar lika bra för att visa $P(4387)$, eller $P(p)$ för vilket positivt heltal p som helst.

Nu återkommer vi till de två punkterna (bassteget och induktionssteget) som hela vårt induktionsresonemang bygger på. Vi måste förstas bevisa båda två för att resonemanget ska vara giltigt.

- Bassteget: Vi behöver visa att $P(1)$ stämmer. Påståendet står utskrivet på första sidan, och det är inte någon tvekan om att det är riktigt.
- Induktionssteget: Vi behöver visa, för alla positiva heltal p , att $P(p+1)$ är en konsekvens av $P(p)$, eller med andra ord, att *om* $P(p)$ är sant så är även $P(p+1)$ sant. Ytterligare ett sätt att säga samma sak är att vi behöver visa att $P(p+1)$ är sant utgående från att $P(p)$ är sant. Konkret betyder det att vi ska bevisa $P(p+1)$ och under bevisets gång får vi, när helst vi vill, använda att $P(p)$ är sant. Ursäkta om jag tjatar.

Nu skriver vi ut i detalj vad vi vill bevisa ($P(p+1)$), och vad vi får anta (hålla för sant), nämligen $P(p)$. I det som följer är p ett positivt heltal, vilket som helst.

$P(p)$ lyder:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4p^2 - 1} = \frac{p}{2p + 1}.$$

$P(p+1)$ lyder: (se definitionen av $P(p)$ i början av den första sidan om du inte är övertygad)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4p^2 - 1} + \frac{1}{4(p+1)^2 - 1} = \frac{p+1}{2(p+1) + 1}.$$

En algebraisk omskrivning visar att $P(p+1)$ även kan skrivas

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4p^2 - 1} + \frac{1}{4p^2 + 8p + 3} = \frac{p+1}{2p+3}.$$

Det är naturligtvis mycket viktigt att hålla isär vad vi *ska bevisa* och vad vi får *anta*. Annars är det lätt hänt att vi gör ett cirkelbevis, alltså att vi antar något och sedan för

ett resonemang som leder tillbaka till det vi antog.

Nu startar vi med beviset av $P(p+1)$, och vi får omedelbart nytta av att vi antagit att $P(p)$ är sant. Vänsterledet i den likhet som vi vill visa är

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4p^2 - 1}}_{=p/(2p+1) \text{ enligt } P(p)} + \frac{1}{4p^2 + 8p + 3} = \frac{p}{2p+1} + \frac{1}{4p^2 + 8p + 3}.$$

Vi behöver alltså visa följande:

$$\frac{p}{2p+1} + \frac{1}{4p^2 + 8p + 3} = \frac{p+1}{2p+3}$$

Det kan man göra på många olika sätt. Ett av dem är att sätta bräken i vänsterledet på gemensamt bråkstreck och addera dem:

$$\begin{aligned} \frac{p}{2p+1} + \frac{1}{4p^2 + 8p + 3} &= \frac{p}{2p+1} + \frac{1}{4(p^2 + 2p + \frac{3}{4})} = \frac{p}{2p+1} + \frac{1}{4(p + \frac{3}{2})(p + \frac{1}{2})} = \\ &= \frac{p}{2p+1} + \frac{1}{(2p+3)(2p+1)} = \\ &= \frac{p(2p+3)}{(2p+1)(2p+3)} + \frac{1}{(2p+3)(2p+1)} = \frac{p(2p+3) + 1}{(2p+1)(2p+3)} = \\ &= \frac{2(p^2 + \frac{3}{2}p + \frac{1}{2})}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{2(p+1)(p + \frac{1}{2})}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{(p+1)(2p+1)}{(2p+1)(2p+3)} = \\ &= \frac{p+1}{2p+3} \end{aligned}$$

Vi ser att vi har kommit fram till precis det vi ville, och vi är klara med induktionssteget. Induktionsbeviset är därmed klart.

I sista delen av vårt induktionsbevis, då vi visar att $P(p+1)$ är sant med hjälp av antagandet att $P(p)$ är sant, omformar vi vänsterledet i $P(p+1)$ till högerledet i $P(p+1)$ och visar på så sätt att de är lika. Ett annat bra sätt att bevisa $P(p+1)$ i de fall då $P(p+1)$ säger att två algebraiska uttryck är lika med varandra (som i denna uppgift till exempel) är att skriva upp differensen mellan vänster och höger led i påståendet, och sedan försöka att förenkla den så mycket som möjligt med hjälp av antagandet att $P(p)$ är sant. Om man lyckas förenkla differensen till 0, så har man förstås bevisat $P(p+1)$. Fördelen är att de två leden i $P(p+1)$ då kan "mötas på mitten", istället för att det ena måste överföras till det andra. I nästa uppgift räknar vi på de två olika sätten för att se vad skillnaden blir.

Nästa uppgift är: Visa att

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \text{ för varje heltal } n \geq 1.$$

$P(p)$, där p är ett positivt heltal, får i denna uppgift beteckna påståendet

$$\sum_{k=1}^p k(k+1) = \frac{1}{3}p(p+1)(p+2).$$

Vi behöver visa: (bassteget och induktionssteget)

- $1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$
- För alla heltal $p \geq 1$ gäller följande implikation:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p+1) &= \frac{1}{3}p(p+1)(p+2) \\ &\Downarrow \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p+1) + (p+1)(p+1+1) &= \frac{1}{3}(p+1)(p+1+1)(p+1+2) \end{aligned}$$

eller, efter omskrivning,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p+1) &= \frac{1}{3}p(p+1)(p+2) \\ &\Downarrow \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p+1) + (p+1)(p+2) &= \frac{1}{3}(p+1)(p+2)(p+3) \end{aligned}$$

Ett annat sätt att formulera induktionssteget är: Bevisa att

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p+1) + (p+1)(p+2) = \frac{1}{3}(p+1)(p+2)(p+3),$$

och använd dig fritt av att

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p+1) = \frac{1}{3}p(p+1)(p+2)$$

närhelst det kan komma till nytta under bevisets gång.

Bassteget vållar inga problem. För att utföra induktionssteget skriver vi

$$\begin{aligned} \underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p+1)}_{= \frac{1}{3}p(p+1)(p+2) \text{ enligt antagande}} + (p+1)(p+2) &= \frac{1}{3}p(p+1)(p+2) + (p+1)(p+2) = \\ [\text{Bryt ut } (p+1)(p+2)] &= (p+1)(p+2)\left(\frac{1}{3}p+1\right) = \\ &= (p+1)(p+2)\frac{1}{3}(p+3) = \\ &= \frac{1}{3}(p+1)(p+2)(p+3). \end{aligned}$$

Vi är nu klara med bassteget och induktionssteget, och har därmed genomfört ett induktionsbevis för att

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \text{ för varje heltal } n \geq 1.$$

Om vi istället hade beräknat differensen mellan vänster och höger led i $P(p+1)$ hade vi fått följande räkningar istället för de som avslutade induktionssteget ovan:

$$\begin{aligned} VL_{p+1} - HL_{p+1} &= \underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p+1)}_{= \frac{1}{3}p(p+1)(p+2) \text{ enligt antagande}} + (p+1)(p+2) - \frac{1}{3}(p+1)(p+2)(p+3) = \\ &= \frac{1}{3}p(p+1)(p+2) + (p+1)(p+2) - \frac{1}{3}(p+1)(p+2)(p+3) = \\ [\text{efter utveckling}] &= \frac{1}{3}(p^3 + 3p^2 + 2p) + p^2 + 3p + 2 - \frac{1}{3}(p^3 + 6p^2 + 11p + 6) = \\ &= \frac{1}{3}p^3 + 2p^2 + \frac{11}{3}p + 2 - \frac{1}{3}(p^3 + 6p^2 + 11p + 6) = 0. \end{aligned}$$

Det kan vara intressant att notera att vi på detta sätt lyckades bevisa $P(p+1)$ utan att behöva bryta ut $(p+1)(p+2)$, som vi gjorde i den föregående metoden. Istället fick vi utveckla några parenteser, men i allmänhet är det ju det en enklare sak att göra än att faktorisera ett uttryck. Dessutom minskar förmodligen risken för att göra cirkelbevis när man beräknar differensen, eftersom man då aldrig skriver upp påståendet $P(p+1)$ (och därmed inte blir frestad att antaga att det är sant), utan man beräknar bara en differens och hoppas på att komma fram till 0 förr eller senare.

Induktionsbevis kan även användas för att bevisa påståenden som inte har med summor att göra. Vi tittar på ytterligare en uppgift:

En talföljd $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definieras av

$$\begin{cases} a_n &= \sqrt{2a_{n-1}} \\ a_0 &= 1 \end{cases}$$

Visa att $a_n \leq 2$ för $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Här låter vi $P(p)$ vara påståendet $a_p \leq 2$. Vi vill visa att $P(0), P(1), P(2), \dots$ är sanna påståenden, så vi genomför ett induktionsbevis. Denna uppgift har en viktig skillnad jämfört med de två första. Vi vill bevisa att ett påstående gäller för $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, alltså från $n = 0$ och uppåt istället för från $n = 1$ och uppåt. Vi måste ta hänsyn till detta och modifiera bassteget en aning. Vi måste nämligen visa att $P(0)$ är sant, istället för att $P(1)$ är sant. Efter att ha utfört detta (det vill säga konstaterat att $a_0 \leq 2$) fortsätter vi och ger oss på induktionssteget. Vi behöver visa att implikationen $P(p) \implies P(p+1)$ gäller för alla $p \geq 0$. Med andra ord: Vi behöver bevisa att $a_{p+1} \leq 2$, och under bevisets gång får vi fritt använda att $a_p \leq 2$ så mycket som det behövs. Vi skriver

$$a_{p+1} = \sqrt{2a_p} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$$

Den första likheten kommer från den rekursiva definitionen av a_p , och den följande olikheten får vi på grund av att $a_p \leq 2$. Vi har alltså bevisat $P(p+1)$, och därmed är induktionsbeviset för att $a_n \leq 2$ för $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ färdigt.