

Kombinatorik

Kombinatorik handlar oftast om att räkna hur många arrangemang det finns av en viss typ. Sådana kalkyler underlättas om man kan hitta relevanta representationer av de inblandade arrangemangen - något som illustreras nedanför.

Cartesisk produkt

Ett ordnat par (x, y) är ett enkelt exempel på ett arrangemang. Hur *många* sådana par det finns, givet att man vet hur många x respektive y det finns att välja mellan? Svaret kommer snart. Först en definition ...

Med den *Cartesiska produkten* $A_1 \times A_2$ mellan två mängder A_1, A_2 avses mängden $\{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$.

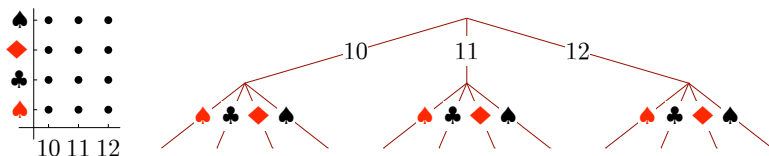
På motsvarande sätt definieras en Cartesisk produkt mellan godtyckligt många mängder: $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$.

Det kanske mest kända exemplet på en Cartesisk produkt är $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (kortnotation $\mathbb{R}^2$). Elementen i denna produkt används som bekant för att beskriva planets punkter med Cartesiska koordinater. Exemplet ger oss en förklaring till den första delen i namnet *Cartesisk produkt*. Vi återkommer snart till en förklaring av den andra delen.

Betrakta först en enkel illustration med två *ändliga* mängder. De tolv spelkort av typen *knekt*, *dam* eller *kung* i "färgerna" hjärter, klöver, ruter eller spader representeras av $\{10, 11, 12\} \times \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$, dvs av

$\{(10, \heartsuit), (10, \clubsuit), (10, \diamondsuit), (10, \spadesuit), (11, \heartsuit), (11, \clubsuit), (11, \diamondsuit), (11, \spadesuit),$
 $(12, \heartsuit), (12, \clubsuit), (12, \diamondsuit), (12, \spadesuit)\}$

som i sin tur representeras grafiskt i två olika bilder nedanför.



$\{10, 11, 12\} \times \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$:s element dyker upp som *punktbeskrivningar* i det rektangulära punktmönstret och som *vägbeskrivningar* i trädet.

Multiplikationsprincipen

Punktbeskrivningen fungerar som en förklaringsmodell för den andra delen i namnet *Cartesisk produkt*. Antalet punkter i det rektangulära punktmönstret beräknas ju genom att *multipliera* antalet punkter i rektangelns ena sida med motsvarande antal i den andra sidan, något som torde övertyga varje läsare om sanningshalten i formeln

$$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|.$$

Motsvarande resultat gäller även för längre Cartesiska produkter:

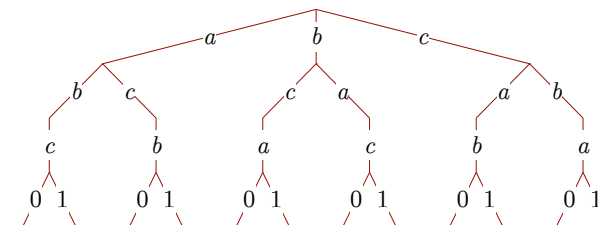
$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|. \quad (1)$$

Den teoretiskt intresserade ombedes fundera över hur (1) kan bevisas för ett godtyckligt heltal $n > 2$.

(1) formuleras ofta på följande mindre kompakta sätt:

Multiplikationsprincipen Om elementen $a_1, \dots, a_n$ kan väljas på $k_1, \dots, k_n$ sätt, så kan $(a_1, \dots, a_n)$ väljas på $k_1 \cdot \dots \cdot k_n$ sätt.

Multiplikationsprincipen är emellertid inte enbart en omformulering av (1). Medan (1) uttalar sig enbart om Cartesiska produkter, så är nämligen nämnda princip tillämplig på *alla* arrangemang som kan representeras av vägbeskrivningar i träd där förgreningar på samma nivå är lika stora. Som exempel på arrangemang av nämnda slag som inte kan representeras av en Cartesisk produkt, betrakta s.k. *teckensträngar* av längd 4, som likt $bac1$ och $ac b0$, slutar på 0 eller 1 och där de tre inledande positionerna upptas av *olika* tecken ur $\{a, b, c\}$.



De tolv vägar i ovanstående träd representerar dessa strängar, så antalet strängar ifråga är lika med 12. Med multiplikationsprincipen som tillhygge, kan vi förstås även *beräkna* antalet strängar: Första tecknet kan

väljas på *tre* sätt, det andra på *två* sätt (Vi måste undvika det tecken som valdes nyss.), det tredje tecknet på exakt *ett* sätt, och det avslutande tecknet på *två* sätt. Antalet strängar blir därför lika med $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2$, dvs 12. Låt oss avsluta första avsnittet med några enkla tillämpningar.

EXEMPEL 1 Hur många tresiffriga tal finns det i tio-systemet, som *inte* är delbara med 5? Anm. Vi tillåter inte tresiffriga tal att börja med 0.

LÖSNING De tresiffriga talen ifråga kan representeras av $A_1 \times A_2 \times A_3$ där $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ och $A_3 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Det följer av (1) att det sökta antalet är lika med $|A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| = 9 \cdot 10 \cdot 8 = 720$.

EXEMPEL 2 Betrakta alla teckensträngar av längd k som *saknar* förekomst av två lika tecken i följd. (T.ex. är *abba* förbjuden.) Hur många tillåtna strängar finns det om varje tecken väljs från ett alfabet med n olika tecken?

LÖSNING Det första tecknet kan väljas på n sätt, det andra på $n - 1$ sätt. (Det gäller ju bara att undvika det tecken som valdes på föregående position.) Samma sak gäller för de återstående positionerna. Det sökta antalet strängar blir därför $n \cdot (n - 1)^{k-1}$.

EXEMPEL 3 Betrakta alla teckensträngar av längd k som *saknar* förekomst av två lika tecken. (T.ex. är *abca* förbjuden.) Hur många tillåtna strängar finns det om tecknen tas (på samma sätt som i förra exemplet) från ett alfabet med n olika tecken?

LÖSNING Det första tecknet kan väljas på n sätt. Och det andra på $n - 1$ sätt. (Det gäller ju bara att undvika det tecken som valdes på föregående position.) Det tredje kan väljas på $n - 2$ sätt. (Vi måste undvika de två tecken som valdes på de första två platserna.) Osv ... Det k :te tecknet kan väljas på $n - (k - 1)$ sätt. Sökta antalet blir $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1))$.

Fallande potens och fakultet

Notera att $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1))$ är en produkt av k stycken faktorer där varje faktor till höger om den inledande faktorn n är en enhet lägre än närmast föregående faktor. Man brukar kalla produkten ifråga för en *fallande potens* och beteckna den $n^{\underline{k}}$. T.ex. är $8^{\underline{3}} = 8 \cdot 7 \cdot 6$.

Den fallande potensen $n^{\underline{n}} = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$ har fått den egna beteckningen $n!$ som uttalas *n-fakultet*.

Permutationer

En *permutation* av en ändlig mängd är en *uppräknings* av mängdens element i en viss ordningsföljd.

EXEMPEL 4 Här är alla (sex) permutationer av $\{1, 2, 3\}$:

$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$

Antalet permutationer

SATS Om $|X| = n$, så är antalet permutationer av X lika med $n!$.

BEVIS: Varje permutation av X är en n -tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ där elementen $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. x_1 kan väljas på n sätt. Ty här har vi alla n element att välja bland. x_2 kan väljas på $n - 1$ sätt. Nu finns det nämligen bara $n - 1$ element kvar att välja bland. Osv ... När x_n står på tur finns det bara 1 element kvar att välja. Antalet permutationer är därför $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$. $\square$

EXEMPEL 5 *HULK*

Hur många teckensträngar kan man bilda genom att kasta om bokstäverna i *HULK*?

LÖSNING Varje teckensträng av omnämnt slag är en permutation av de fyra bokstäverna i *HULK*. Det följer att sökta antalet är $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

EXEMPEL 6 HULL

Hur många teckensträngar kan man bilda genom att kasta om bokstäverna i HULL?

LÖSNING Betrakta först bokstäverna i HUL_1L_2 . De kan permuteras på $4!$ sätt. Varje sådan permutation har en "tvillingpermutation" som skiljer sig från den förra enbart genom att de två L :en är omkastade. Härav följer att svaret på den givna frågan är $\frac{4!}{2} = 12$.

EXEMPEL 7 MAHNAHMAHNA

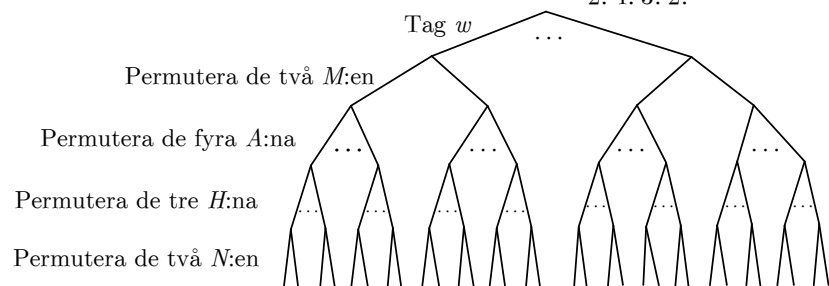
Hur många teckensträngar kan man bilda genom att kasta om bokstäverna i MAHNAHMAHNA? T.ex. är MAHNAHMAHNA och MANNHAHAHAM två sådana strängar.

LÖSNING Notera först att detta exempel är av samma typ som det förra. Rimligtvis finns det därför något enkelt samband mellan antalet strängar som kan bildas ur MAHNAHMAHNA och antalet strängar som kan bildas ur $M_1A_1H_1N_1A_2H_2M_2A_3H_3N_2A_4$.

Antalet strängar av det senare slaget är förstås lika med $11!$.

Men vi ska se att det också är lika med $x \cdot 2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!$, om x antas beteckna antalet strängar av det förstnämnda slaget. Detta förklaras kanske enklast med hjälp av trädet nedanför vars vägar representerar strängarna som kan bildas ur $M_1A_1H_1N_1A_2H_2M_2A_3H_3N_2A_4$. De översta vägstumparna representerar de x strängar w som det enligt antagandet går att bilda ur MAHNAHMAHNA. De efterföljande förgreningarna representerar för varje w permutationer av de två M :en, de fyra A :na, de tre H :na och de två N :en.

Det följer att $x \cdot 2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 11!$. Härav, $x = \frac{11!}{2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!} = 69\,300$.



Binomialtal

När en potens $(z + 1)^n$ av ett *binom* expanderas (utvecklas) får man ...

$$\begin{aligned}
 (z + 1)^0 &= 1 \\
 (z + 1)^1 &= z + 1 \\
 (z + 1)^2 &= z^2 + 2z + 1 \\
 (z + 1)^3 &= z^3 + 3z^2 + 3z + 1 \\
 (z + 1)^4 &= z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1 \\
 (z + 1)^5 &= z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 \\
 (z + 1)^6 &= z^6 + 6z^5 + 15z^4 + 20z^3 + 15z^2 + 6z + 1 \\
 (z + 1)^7 &= z^7 + 7z^6 + 21z^5 + 35z^4 + 35z^3 + 21z^2 + 7z + 1
 \end{aligned}$$

De resulterande s.k. *binomialutvecklingarna* har koefficienter - kallas *binomialtal* - som innehåller kombinatorisk information. Avsnitten nedanför kommer att avslöja en del av detta.

Pascals triangel

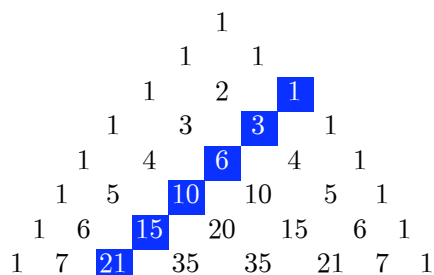
Om man i presentationen av de expanderade binomen ovanför skalar bort allt utom binomialtalen framträder ett triangulärt mönster som kallas Pascals triangel (efter Blaise Pascal 1623 - 1662).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
 \end{array}$$

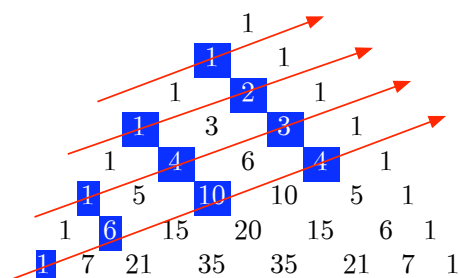


Många intressanta tal och mönster dyker upp i Pascals triangel ...

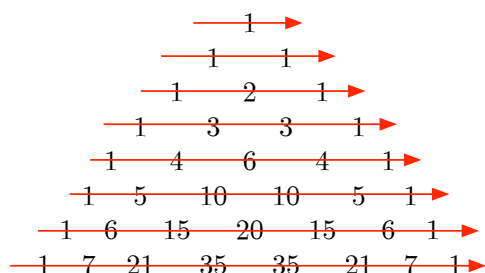
Triangeltalen



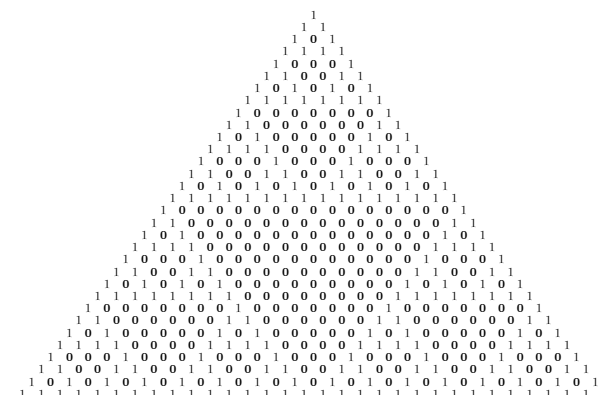
Fibonaccitalen



Ser du dem inte? Summera elementen längs varje pildiagonal! Summeras istället elementen längs varje rad får man tvåpotenserna.



Om varje jämnt binomialtal bytes ut mot 0 och varje udda mot 1, träder ett intressant mönster fram ...



Kombinationer

Inom kombinatoriken används ordet *kombination* synonymt med ordet *delmängd*. Och att *kombinera* k element ur en mängd med n element betyder "att bilda en k -delmängd (en delmängd av storlek k) med hjälp av element från en mängd av storlek n " - man brukar också säga "att välja k element av n element". Här får du nåt att fundera över: Hur många sätt finns det att välja tre av fem element? Svaret finns några stycken nedanför.

 n välj k

Låt $\binom{n}{k}$ beteckna antalet sätt att välja k element av n .

Uttalas " n välj k " eller " n över k ".

Anmärkning Eftersom k stycken element valda ur $X = \{1, 2, \dots, n\}$ bildar en k -delmängd av X , så är $\binom{n}{k}$ lika med antalet k -delmängder av X .

EXEMPEL 8 Här är samtliga 3-delmängder av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$,
 $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$

De är 10 st. Således är $\binom{5}{3} = 10$.

Några enkla identiteter

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

BEVIS Det finns exakt *en* 0-delmängd av $X = \{1, 2, \dots, n\}$, nämligen den tomma mängden, och exakt *en* n -delmängd, nämligen X själv. $\square$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

BEVIS Det finns lika många k -delmängder av $X = \{1, 2, \dots, n\}$ som det finns $(n-k)$ -delmängder. Varför? Jo, till varje delmängd (av X) hör exakt en komplementmängd. Så enkelt är det! $\square$

Illustration: Låt $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Till delmängden $\{2, 5\}$ hör komplementmängden $\{1, 3, 4, 6\}$.

Två formler

Först den klassiska kvotformeln

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!} = \frac{n!}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\dots 1}$$

Anmärkning Lägg märke till hur enkelt det är att memorera kvoten, eftersom den har *lika långa* fallande potenser i täljaren och i nämnaren. Längden är k , och i täljaren börjar man falla från n , i nämnaren från k .

BEVIS

Formeln följer (eller hur!) om vi kan visa att

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)). \quad (2)$$

beskriver samma sak som

$$\binom{n}{k} \cdot k(k-1)(k-2)\dots 1 \quad (3)$$

Men varför beskriver (2) och (3) samma sak då? Jo, därför att båda uttrycken beskriver *antalet permutationer* av k element valda ur $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

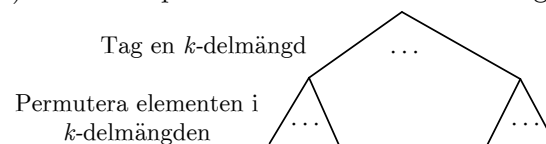
Att (2) beskriver det nämnda *antalet* är en direkt konsekvens av

multiplikationsprincipen eftersom första elementet i en sådan permutation kan väljas på n sätt, nästa element på $n-1$ sätt, osv...

Att (3) beskriver samma sak följer också av multiplikationsprincipen.

Ty varje permutation av nämnt slag kan skapas genom att man

- (i) först tager en k -delmängd av $\{1, 2, 3, \dots, n\}$,
- (ii) och sedan permuterar elementen i den tagna k -delmängden.



Eftersom (i) kan utföras på $\binom{n}{k}$ sätt och (ii) på $k!$ sätt, så följer resten av multiplikationsprincipen. $\square$

EXEMPEL 9 $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

Sedan rekursionsformeln

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

BEVIS

Då man skall komponera en k -delmängd A av $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ måste man ta ställning till huruvida elementet $n+1$ skall vara med i A eller inte.

Fall 1. $n+1 \in A$. Här behöver vi bara komplettera singelmängden $\{n+1\}$ med ytterligare $k-1$ stycken element för att A skall bli en k -delmängd. Eftersom de kompletterande elementen måste väljas ur $\{1, 2, \dots, n\}$ kan man välja dem på $\binom{n}{k-1}$ sätt.

Fall 2. $n+1 \notin A$. Nu måste A 's samtliga k element tas ur $\{1, 2, \dots, n\}$, vilket kan göras på $\binom{n}{k}$ sätt.

De två fallen sammantagna bevisar rekursionsformeln. $\square$

Med hjälp av $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ och rekursionsformeln kan man från

$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ beräkna $\binom{n+1}{0}, \binom{n+1}{1}, \dots, \binom{n+1}{n+1}$.

Gör man detta för det ena n -värdet efter det andra återskapas den ena raden efter den andra i Pascals triangel.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
 & & \binom{4}{2} & & & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & \\
 & 1 & 2 & 1 & \\
 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & & 6 & &
 \end{array}$$

Binomialsatsen

Hur kan det nu komma sig att att $\binom{n}{k}$ dyker upp i Pascals triangel?

Med andra ord, vad har "antalet sätt att välja k element bland n element" med binomialtalen att göra?

Svar: Vid expansionen av $(z+1)^n = (z+1) \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+1)$ skall n stycken parentesuttryck multipliceras ihop. Varje term som uppstår vid denna multiplikation är en produkt av n stycken faktorer - en faktor från varje parentesuttryck. Termen $z^k = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{k \text{ st}}$ uppstår då z väljs ur exakt

k stycken av de n parentesuttrycken (och 1 väljs ur de resterande parentesuttrycken). Därför kommer multiplikationen att generera just $\binom{n}{k}$ stycken z^k -termer. $\square$

Vi har just bevisat

$$\text{BINOMIALSATSEN} \quad (z+1)^n = \binom{n}{0} z^0 + \binom{n}{1} z^1 + \binom{n}{2} z^2 + \dots + \binom{n}{n} z^n$$

EXEMPEL 10 Expandera $(a+b)^n$

LÖSNING

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n &= b^n \left(\frac{a}{b} + 1 \right)^n = b^n \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{a}{b} + \binom{n}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \dots + \binom{n}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n \right) = \\
 &= \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n
 \end{aligned}$$

EXEMPEL 11 MAHNAHMAHNA igen

Hur många teckensträngar kan man bilda genom att kasta om bokstäverna i ordet MAHNAHMAHNA?

LÖSNING Det gäller att välja positioner åt två M , fyra A , tre H och två N i en sträng av längd 11. Eftersom det finns $\binom{11}{2}$ sätt att placera två M , sedan $\binom{9}{4}$ sätt att placera fyra A , och $\binom{5}{3}$ sätt att placera tre H , samt $\binom{2}{2}$ sätt att placera två N . Det följer att sökta antalet strängar är lika med $\binom{11}{2} \binom{9}{4} \binom{5}{3} \binom{2}{2} = 69\,300$.

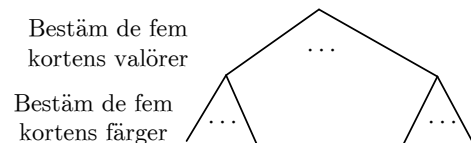
EXEMPEL 12 Poker ♠, ♦, ♣, ♠

Hur många pokerhänder finns det där *inga* av de fem korten har samma valör (t.ex. *inte* två ettor eller tre åttor)?

Anm. En *pokerhand* är en kombination av fem kort tagna ur en vanlig kortlek med 52 kort.

LÖSNING Ett enskilt kort har *en* valör (av tretton möjliga), samt *en* "färg" av fyra möjliga: ♠, ♦, ♣, ♠.

Så varje pokerhand är bestämd efter att man (i) har bestämt valörer på korten, och (ii) har satt färg på dem.



Eftersom det finns 13 valörer, finns det $\binom{13}{5}$ sätt att välja 5 *olika* valörer. (Notera att vi *måste* välja *olika* valörer för att förhindra att två kort får samma valör!) Vidare finns det $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$ sätt att färga de fem korten eftersom varje kort kan färgas i vilken som helst av 4 färger.

Av multiplikationsprincipen följer svaret $\binom{13}{5} \cdot 4^5 = 1\,317\,888$.

EXEMPEL 13 Mera poker

Hur många pokerhänder finns det av typen "två par" (t.ex. två ettor och två åttor)?

LÖSNING

- (i) Välj valör åt de två paren $\binom{13}{2}$ sätt
- (ii) Välj valör åt det återstående kortet $\binom{11}{1}$ sätt
- (iii) Välj färger åt de två paren $\binom{4}{2}\binom{4}{2}$ sätt
- (iv) Välj färger åt det återstående kortet 4 sätt

Det sökta svaret blir $\binom{13}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{2}4 = 123\,552$.

ÖVNINGAR

- Visa de två slösaaktiga formlerna $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ respektive $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ och förklara på vilket sätt de är slösaaktiga.

- Hur många strängar av längd 13 med samtliga tecken valda ur $\{1, X, 2\}$ finns det (a) totalt, (b) som innehåller exakt två 1:or, (c) som innehåller minst två 1:or.

- Hur många strängar av längd $2n+1$ komponerade med bokstäver ur $\{a, b, c\}$ är (i) palindromer, (ii) palindromer där a förekommer på exakt fem av de $2n+1$ platserna.

Anmärkning Med *palindrom* menas en sträng som inte ändras om man vänder på den, ex.vis *accbcbcca*.

- Hur många ord med fyra bokstäver kan man bilda med användande av bokstäverna i ordet *SAMOVAR*?

- På hur många sätt kan man välja sex varma korvar om det finns tre olika sorter?

- En kortlek (52 kort) är uppdelad i två buntar med 20 respektive 32 kort. På hur många sätt kan slutresultatet se ut när de två buntarna skjutits in i varandra?

- Hur många olika tärningar finns det om man släpper på kravet att summan av antalet prickar på motstående sidor skall vara sju?

- På hur många sätt kan man fylla en låda med tolv äpplen om man har fem olika sorter och vill ha minst ett av varje sort?

- Bestäm koefficienten framför z^{291} efter att $(z^3 + 3)^{100}$ har expanderats.

- Visa med kombinatoriskt resonemang:

$$\binom{3n}{3} = n^3 + 6\binom{n}{2}n + 3\binom{n}{3}$$

- Förenkla uttrycket

$$\sum_{k=0}^n 3^k \binom{n}{k}.$$

12. Bevisa likheten

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

13. På hur många sätt kan man välja tio bollar från en hög med röda, blå och gula bollar om man måste välja minst fem röda? Om man inte får ha fler än fem röda?

14. På hur många sätt kan man ställa tolv personer i rad så att personerna A , B , C och D alltid har samma inbördes ordning?

15. Hur många av talen mellan 1000 och 9999 innehåller exakt två ettor?

16. En brevbärare har femton brev, adresserade till femton olika adressater. På hur många sätt kan han lämna breven så att exakt tre av dem kommer fel?

17. En samling på tolv personer skall delas upp i två grupper om vardera sex personer. På hur många sätt kan det ske? Samma fråga om man istället skall dela upp de tolv i fyra grupper med tre personer i varje?

18. Åtta identiska föremål läggs i tre tomma skålar. Ingen skål blir tom efteråt. Hur många sådana arrangemang finns det?

19. Man markerar födelsedagarna för 23 personer i sin almanacka. Låt oss kalla almanackans utseende efteråt för en födelsedagsalmanacka.

- (a) Hur många födelsedagsalmanackor är möjliga (för de 23 personerna)?
- (b) I hur många av dessa är någon dag markerad minst två gånger?
- (c) Hur stor är sannolikheten att minst två personer av 23 har samma födelsedag, om vi antar att alla födelsedagar är lika sannolika?

20. Fyra kast görs med en tärning. (a) Hur många kastserier är möjliga?

- (b) Hur många av dessa innehåller minst en sexa?
- (c) Är det fördelaktigt att i ett vad hålla på att minst en sexa kommer upp?