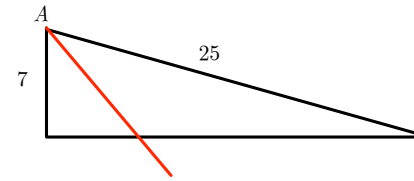


Problemsamling

1. Skriv $3.33456456456456 \dots$ på formen $\frac{m}{n}$ där $m, n \in \mathbb{Z}$.
2. Förenkla $2^{\log_4(16)}$.
3. Lös $\frac{x-1}{x+1} < \frac{x+1}{x-1}$.
4. Lös $|x+1| < (x+1)^2$.
5. Lös $x = \sqrt{2x-1} + 2$.
6. Lös $(\ln(x) - 1)(e^{2x} - e^x) = 0$.
7. Bestäm skärningspunkterna mellan cirkeln $x^2 + y^2 = 17$ och hyperbeln $x^2 - y^2 = 5$ och rita figur.
8. Lös $\cos(x) = \sin(x)$.
9. Lös $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$.
10. Visa att

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$
11. Bestäm konstanttermen efter expansion av $\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)^{50}$.
12. Vilken typ av andragradskurva beskrivs av $2x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$. Rita kurvan.
13. Visa att $5x^2 - 6yx + 2y^2 < 0$ saknar reella lösningar.
14. Bestäm alla reella x som uppfyller
 - a) $|x+2| + |x| < 2$, b) $|x+2| - |x| < 2$, c) $||x+2| - |x|| < 2$.
15. Hur delar *bisektrisen* från A motstående sida i den rätvinkliga

triangeln nedanför?



16. Lös ekvationen $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -1$.
17. Lös ekvationen $|z|^2 = \operatorname{Im}(2z)$ och illustrera grafiskt i det komplexa talplanet.
18. Bestäm punkterna i komplexa planet som uppfyller
 - (a) $\left| \frac{z-1-i}{z+i} \right| = 1$
 - (b) $\left| \frac{z-1-i}{z+i} \right| = 2$
 Illustrera grafiskt.
19. Lös ekvationen $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + \operatorname{Im} z + 1$ och illustrera grafiskt i det komplexa talplanet.
20. $z^3 + 4z^3 + z + 2 = 0$ har rötterna $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Bestäm $(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3)$.
21. Ange rötterna till den binomiska ekvationen $z^6 = -8i$ både på polär och kartesisk form samt markera dem i det komplexa planet.
22. Lös $z^6 = i$. Ange rötterna både på polär och kartesisk form samt markera dem i det komplexa planet.
23. Lös $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8 = 0$. LEDNING: Det finns en imaginär rot.
24. Är $x = 3$ en rot till $x^{1000} - 46376x^{300} - 40980x^2 + x + 4 = 0$?
25. Vilka polynom $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ med heltalskoefficienter a, b, c har samtliga nollställen lika med hela tal.

26. Bestäm samtliga nollställen till polynomet $z^3 + z^2 + az - a^2$ om man vet att polynomet har nollstället 1.

27. Bestäm samtliga nollställen till polynomet $z^4 - 8z^3 + az^2 + bz + c$ där a, b, c är reella om man vet att polynomet har ett reellt dubbelt nollställe samt det ickereella nollstället $2 + i$.

28. (a) Finn en sluten formel för $a(n)$ då

$$a(0) = 1, \quad a(1) = 2$$

$$a(n+2) = 2a(n+1) - a(n)$$

(b) Beskriv hur ett induktionsbevis är uppbyggt.

(c) Bevisa korrektheten hos din slutna formel med ett induktionsbevis.

29. Visa att vinkelsumman i en triangel är π , och ge sedan ett induktionsbevis för att vinkelsumman i en n -hörning är lika med $(n-2)\pi$ då $n \geq 3$.

30. Betrakta funktionen $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ sådan att

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 3$$

$$f(n+3) = 4f(n+2) - 8f(n) - 5$$

(a) Finn en sluten formel för $f(n)$.

(b) Bevisa med induktion att din slutna formel är korrekt.

31. (a) Visa att om $\sqrt{1+x}$ är rationell så x rationell.

(b) Presentera en rekursionsformel för följden

$$\sqrt{1+\sqrt{1}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} , \dots$$

(c) Ge ett induktionsbevis för att samtliga tal i ovanstående följd är irrationella. Du får använda dig av att $\sqrt{2}$ är irrationellt.

32. Agör vilket som är störst av $\binom{n}{k}$ och $\binom{n-1}{k-1}$, då $n > k > 0$.

33. En nyckelfabrikör tillverkar sina nycklar genom att fräsa ur skåror i en blank nyckel. Hur många skåror krävs för att tillverka 10^6 olika nycklar om skåror kan ha åtta olika djup.

34. Hur många olika utfall med *exakt* respektive *minst* två sexor kan man få vid kast med sju tärningar? (Vi bortser från vilka tärningar som visar de olika valörerna.)

35. Hur många teckensträngar kan man bilda genom att kasta om tecknen i

"ANDANTE CANTABILE"?

ANM. Blanktecknet mellan ANDANTE och CANTABILE räknas också som ett tecken. Tex är "CABEL DIANATENTAN" en av de strängar som kan bildas.

36. Hur många bitsträngar av längd $n \geq 2$ finns det som har två 1:or, och där 1:orna inte står intill varandra?

37. Hur många olika fruktkorgar kan man arrangera med tio äpplen, om man har tre sorters äpplen och vill ha minst ett äpple av varje sort?