UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Styf, 0707-253107

Prov i matematik
Distanskurs
Linjär algebra o geometri 1
2012-04-28

Skrivtid: 10.00–15.00 . Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Varje uppgift är värd 5 poäng. Lösningarna skall vara försedda med förklarande text. Skriv läsbart!

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 11 \\ x_1 & + & 4\,x_2 & + & 3\,x_3 & & & = & 13 \end{array}$$

2. Bestäm alla matriser X sådana att

$$XA^T = B$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Låt $A = (1, 2)$, $B = (4, 1)$ och $C = (3, 5)$ vara tre punkter i planet. Bestäm arean av triangeln med hörn i dessa tre punkter.

4. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 1 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 \\ -1 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

inverterbar?

5. Planet Π skär koordinataxlarna i punkterna $(2, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, -2)$. Bestäm punkten N, på Π, som ligger närmast punkten $(3, 2, -1)$.

6. Låt $A = (2, -1, 0)$ och $B = (-2, 2, 2)$. Linjen L går genom origo och är parallell med vektorn $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^T$. Bestäm alla punkter C på linjen L, sådana att triangeln ABC blir rätvinklig vid A eller B.

7. Låt A vara projektionen av punkten $(2, 0, -1)$ på planet $x + y - z = 0$ och låt B vara speglingen av punkten $(0, 1, -2)$ i samma plan. Finn en ekvation på parameterform för linjen genom A och B.

8. Låt $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$. En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras genom

$$f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v}) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{n} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

där g är den ortogonala projektionen längs $\mathbf{n}$. Bestäm f:s standardmatris och visa att f är inverterbar. Bestäm även alla vektorer $\mathbf{v}$ för vilka $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.