Svar till tentamen i linjär algebra och geometri I, 2012–04–28

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 11 \\ x_1 & + & 4\,x_2 & + & 3\,x_3 & & & = & 13 \end{array}$$

Svar. Vi sätter upp systemet på matrisform och gör radoperationer tills vi får en trappmatris:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 11 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

Av den högra matrisen följer att lösningarna ges av

$$\begin{aligned} 4x_1 &= 16 + x_4 \\ 2x_2 &= 6 + x_4 \\ 4x_3 &= -4 - 3x_4 \end{aligned}$$

där x_4 kan väljas godtyckligt. Vi sätter $x_4 = 4t$ och får

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+t \\ 3+2t \\ -1-3t \\ 0+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

□

2. Bestäm alla matriser X sådana att

$$XA^T = B$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Svar. Med standardmetoden för matrisinvertering får vi:

$$(A \mid I) \sim (I \mid A^{-1}) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Alltså har vi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Det följer att

$$X = B(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

□

3. Låt $A = (1,2)$, $B = (4,1)$ och $C = (3,5)$ vara tre punkter i planet. Bestäm arean av triangeln med hörn i dessa tre punkter.

Svar. Vi har $\overrightarrow{AB} = (3,-1)^T$ och $\overrightarrow{AC} = (2,3)^T$. Eftersom

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

har parallellogrammen som spänns upp av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ arean 11. Triangeln ABC har därför arean $11/2$. $\square$

4. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 1 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 \\ -1 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

inverterbar?

Svar. Vi löser ekvationen $0 = \det(A)$. Genom successiva rad- och kolonnoperationer, som inte förändrar värdet på determinanten, samt utveckling efter lämplig rad eller kolonn, får vi

$$0 = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 1 \\ x & x & -1 & 0 \\ x & 1 & x & -1 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = (x)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ 1 & 1 & x & -1 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & x & -2 \\ 0 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x)\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ 0 & x & -2 \\ x & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & x & -2 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & x & -2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = x^2(x^2+4)$$

Ekvationens enda rot är därför $x = 0$. Alltså är A inverterbar för $x \neq 0$. $\square$

5. Planet Π skär koordinataxlarna i punkterna $(2,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,-2)$. Bestäm punkten N, på Π, som ligger närmast punkten $(3,2,-1)$.

Svar. Π har en ekvation på formen $ax + by + cz = d$. De tre punkternas koordinater uppfyller denna ekvation. Alltså har vi $2a = d$, $b = d$, $-2c = d$. Genom att välja $d = 2$ får vi ekvationen $x + 2y - z = 2$, för Π. En normalvektor till Π är $\mathbf{n} = (1,2,-1)^T$. Linjen L som går genom $(3,2,-1)$ och är parallell med $\mathbf{n}$ har därför en parameterekvation $(x,y,z) = (3+t, 2+2t, -1-t)$. L skär Π i punkten $N = (3+t, 2+2t, -1-t)$. N:s koordinater ges därför av

$$2 = (3+t) + (4+4t) - (-1-t) = 6t + 8 \quad \Rightarrow \quad t = -1.$$

Alltså har vi $N = (2,0,0)$. $\square$

6. Låt $A = (2, -1, 0)$ och $B = (-2, 2, 2)$. Linjen L går genom origo och är parallell med vektorn $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^T$. Bestäm alla punkter C på linjen L, sådana att triangeln ABC blir rätvinklig vid A eller B.

Svar. $C = (t, t, t)$ för något värde på t. Vi har $\overrightarrow{AB} = (-4, 3, 2)^T$, $\overrightarrow{AC} = (t-2, t+1, t)^T$ och $\overrightarrow{BC} = (t+2, t-2, t-2)^T$. Triangeln är rätvinklig vid A om och endast om

$$0 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4t + 8 + 3t + 3 + 2t = t + 11 \quad \Rightarrow \quad t = -11,$$

svarande mot punkten $C = (-11, -11, -11)$. Triangeln är rätvinklig vid B om och endast om

$$0 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -4t - 8 + 3t - 6 + 2t - 4 = t - 18 \quad \Rightarrow \quad t = 18,$$

svarande mot punkten $C = (18, 18, 18)$. $\square$

7. Låt A vara projektionen av punkten $(2, 0, -1)$ på planet $x + y - z = 0$ och låt B vara speglingen av punkten $(0, 1, -2)$ i samma plan. Finn en ekvation på parameterform för linjen genom A och B.

Svar. Låt L vara linjen genom A och B. Planet har normalen $\mathbf{n} = (1, 1, -1)^T$. Standardmatrisen Q för projektionen längs $\mathbf{n}$ ges av

$$Q = \frac{\mathbf{n}\,\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{n}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1,\ 1,\ -1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Standardmatrisen P för projektionen på planet ges av

$$P = I - Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Standardmatrisen S för speglingen i planet ges av

$$S = I - 2Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Det följer att

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En vektor parallell med L är $\overrightarrow{BA}\ /3 = (1, 0, 0)^T$. En parameterekvation för L är därför $(x, y, z) = (1 + t, -1, 0)$. $\square$

8. Låt $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$. En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras genom

$$f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v}) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{n} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

där g är den ortogonala projektionen längs $\mathbf{n}$. Bestäm f:s standardmatris och visa att f är inverterbar. Bestäm även alla vektorer $\mathbf{v}$ för vilka $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Svar. Vi har

$$[g] = \mathbf{n}\mathbf{n}^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Låt

$$h(\mathbf{v}) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{n} \times \mathbf{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -v_2 + v_3 \\ v_1 - v_3 \\ -v_1 + v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v}$$

Matrisen för h är alltså

$$[h] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det följer att

$$[f] = [g] + [h] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Att f är inverterbar följer av att

$$\det[f] = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Antag nu att $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Då gäller

$$\mathbf{v} - g(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) - g(\mathbf{v}) = h(\mathbf{v})$$

Eftersom $h(\mathbf{v})$ är vinkelrät mot både $\mathbf{n}$ och $\mathbf{v}$ och $g(\mathbf{v})$ är parallell med $\mathbf{n}$ så är $h(\mathbf{v})$ vinkelrät mot $\mathbf{v} - g(\mathbf{v})$. Två mot varandra ortogonala vektorer kan bara vara lika om båda vektorerna är lika med $\vec{0}$. Det följer att $\mathbf{v} = g(\mathbf{v})$, vilket gäller om och endast om $\mathbf{v}$ är parallell med $\mathbf{n}$. Alltså har vi $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ om och endast om $\mathbf{v}$ är parallell med $\mathbf{n}$. □