Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

LAoG I, 5 hp
ES1, KandMa1, MatemA
2012-09-06

Sammanfattning av föreläsningarna 5 - 7.

Föreläsningarna 5–7, 17/9–26/9 2012: Det kommer, liksom i läroboken, inte att finnas utrymme för en ordentlig genomgång av determinanter. Här är det därför extra viktigt att du skriver ner alla frågor som dyker upp och tar med till föreläsningarna/lektionerna.

- **Elementära matriser.** En elementär matris fås genom att man på en enhetsmatris gör **en** radoperation (byter plats på två rader, multiplicerar **en** rad med ett nollskilt tal eller till en rad adderar en godtycklig multipel av en annan rad). Exempel på elementära matriser är I (som fås genom att en godtycklig rad i I multipliceras med 1),

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E_1 fås genom att andra- och tredje raden i I_3 byter plats. E_2 fås genom att andra raden i I_3 multipliceras med 4. E_3 fås genom att man till den tredje raden i I_3 adderar -5 gånger den första raden.

Inversen och transponatet av en elementärmatris är också en elementärmatris. Till exempel har vi $E_1 = E_1^{-1} = E_1^T$, $E_2 = E_2^T$ och

$$E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementära matriser svarar mot radoperationer på så sätt att om E fås genom en viss radoperation på I_m (till exempel att tredje raden i I multipliceras med α) så gäller, för varje $m \times n$-matris A, att EA är identisk med den matris som fås genom att göra denna radoperation (tredje raden i A multipliceras med α) på A.

Eftersom varje matris A är radekvivalent med en reducerad trappmatris C finns det alltså en följd $E_1, \ldots, E_p$ av elementära matriser så att

$$E_p \cdots E_1 A = C \quad \Longleftrightarrow \quad A = E_1^{-1} \cdots E_p^{-1} C \qquad (\#)$$

Detta ger oss följande

- **Sats.** Varje matris kan skrivas som en produkt av elementära matriser följt av en (reducerad) trappmatris.

Om $m = n$ gäller att A är inverterbar om och endast om $C = I$, vilket ger

- **Sats.** En (kvadratisk) matris A är inverterbar om och endast om A kan skrivas som en produkt av elementära matriser.

- **Exempel.** Skriv matriserna $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ och A^{-1} som produkter av elementära matriser.

  Lösning. Vi använder följande notation: Att rad 1 ska lämnas oförändrad anges genom att vi skriver $\boxed{1}$ till höger om rad 1. Att rad 2 ska bytas mot rad 2 minus tre gånger rad 1 anges genom att vi skriver $\boxed{2} - 3\boxed{1}$ till höger om rad 2. Att rad 1 och rad 2 ska byta plats anges genom att vi skriver $\boxed{2}$ till höger om rad 1 och $\boxed{1}$ till höger om rad 2 o.s.v. Till höger om symbolen $\sim$ skriver vi sedan den matris som radoperationen (radoperationerna) ger upphov till.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} - 3\boxed{1} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} + \boxed{2} \\ \boxed{2} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2}(-\frac{1}{2}) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  De elementära matriser som svarar mot radoperationerna fås nu genom

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} - 3\boxed{1} \end{array} \sim E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} + \boxed{2} \\ \boxed{2} \end{array} \sim E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2}(-\frac{1}{2}) \end{array} \sim E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  Av ovanstående följer att

$$A^{-1} = E_3 E_2 E_1 \qquad \text{och} \qquad A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}.$$

$\square$

- **Exempel.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  Beräkna A^{-1}. Skriv matriserna A och A^{-1} som produkter av elementära matriser.

  Lösning. Utgående från A gör vi en serie radoperationer tills vi får enhetsmatrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} - \boxed{1} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} - 3\boxed{3} \\ \boxed{3} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} - 2\boxed{2} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Elementarmatriserna som svarar mot de fyra radoperationerna fås nu genom

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} - \boxed{1} \end{matrix} \sim E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} - 3\boxed{3} \\ \boxed{3} \end{matrix} \sim E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} - 2\boxed{2} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{matrix} \sim E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{matrix} \sim E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ovanstående innebär att $E_4E_3E_2E_1A = I$. Det följer att

$$A^{-1} = E_4E_3E_2E_1 \qquad \text{och} \qquad A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= E_4E_3E_2E_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E_2E_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Se även problem 2, i redovisningsuppgifterna till lektion 3, som du hittar på kurshemsidan.

Determinanter. Till varje kvadratisk matris $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ hör ett unikt **tal** som sägs vara A:s determinant och betecknas $\det(A)$, $\det A$ eller $|A|$ (lodräta streck till vänster- och till höger om matrisen). Används beteckningen $|A|$ är det onödigt att ha kvar parenteserna som normalt omgärdar matrisen.

Först måste förstås determinanten **definieras**. Eftersom definitionen är rätt omständig väntar vi dock med detta (se nedan).

Ur definitionen är det lätt att, i tur och ordning, härleda ett antal egenskaper hos determinanten, som är värdefulla vid dess beräknande. Vi anger dessa egenskaper i den ordning de härleds:

- **Determinanten av en matris med en nollrad eller nollkolonn.** Av definitionen följer genast (se nedan) att om A har en nollrad eller en nollkolonn så är $\det A = 0$.

- **Determinanten av en triangulär matris.** Determinanten av en uppåt- eller nedåt triangulär matris

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & * & * \\ O & \ddots & * \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ * & \ddots & O \\ * & * & d_n \end{pmatrix}$$

ges av $\det A = d_1 \cdots d_n$ (produkten av talen i huvuddiagonalen). Exempelvis gäller att $\det(I_n) = 1$,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (1)(4)(6) = 24$$

och en triangulär matris har determinanten noll om och endast om det finns en nolla i diagonalen.

- **Radbytessatsen.** Denna säger att om matrisen B fås genom att två rader i A byter plats så gäller $\det A = -\det B$. Till exempel

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Av radbytessatsen följer direkt att om A har två lika rader så gäller $\det A = 0$.

- **Linearitetssatsen för rader.** Antag att de tre matriserna A, A', A'' är identiska förutom att

$$\mathbf{a}_r = \lambda \mathbf{a}'_r + \mu \mathbf{a}''_r$$

där λ, μ är skalärer och $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}'_r, \mathbf{a}''_r$ är de r:te raderna i A, A' respektive A''. Då gäller

$$\det A = \lambda \det(A') + \mu \det(A'')$$

Till exempel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} = (3) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} + (4) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\lambda & \lambda & 0 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} = (\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

- **Determinanten efter en radoperation.** Av linearitetssatsen följer två viktiga räkneregler:
  - Om matrisen B fås genom att en multipel av en rad i matrisen A adderas till en annan rad i A så gäller det $A = \det B$.

    Bevis. Antag att $\mathbf{b}_r = \mathbf{a}_r + \mu \mathbf{a}_s$ (r:te raden i B fås genom att man till r:te raden i A adderar μ gånger den s:te raden i A, där $s \neq r$). Låt A' vara identisk med A, förutom att rad r i A' är identisk med rad s i A. Linearitetssatsen ger

    $$\det B = \det(A) + \mu \det(A') = \det(A)$$

    eftersom $\det(A') = 0$, på grund av att raderna r och s är lika. $\square$

  - Om matrisen A fås genom att en rad i matrisen A' multipliceras med ett tal λ så gäller det $A = \lambda \det(A')$.

    Bevis. Antag att $\mathbf{a}_r = \lambda \mathbf{a}'_r$ (r:te raden i A fås genom att den r:te raden i A' multipliceras med λ). Låt A'' vara identisk med A', förutom att rad r i A'' är en nollrad. Linearitetssatsen ger

    $$\det A = \lambda \det(A') + \det(A'') = \lambda \det(A')$$

    eftersom $\det(A'') = 0$, på grund av att A'' har en nollrad. $\square$

- **Exempel.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 20 & 25 & 30 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 15.$$

- **Determinanten av en elementär matris.** Av ovanstående följer att

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{och} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda$$

  Den tredje typen av elementarmatris, som fås genom att två rader i enhetsmatrisen byter plats, har determinanten -1. Till exempel

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

  Radbytes- och linearitetssatserna kan uttryckas som att för varje kvadratisk matris B och varje elementär matris E gäller att $\det(EB) = (\det E)(\det B)$.

  Genom upprepad användning av detta får vi att om $A = E_1 \cdots E_k B$, där $E_1, \ldots, E_k$ är elementära matriser, så gäller

$$\det A = (\det E_1) \cdots (\det E_k)(\det B)$$

- **Exempel.** Låt
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
där $a \neq 0$ och $\delta = ad - bc \neq 0$. Skriv A som en produkt av elementarmatriser och använd denna för att visa att
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Lösning. En följd radoperationer, med utgångspunkt från A, ger

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1}(\frac{1}{a}) \\ \boxed{2} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ c & d \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} - c\boxed{1} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & \frac{\delta}{a} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} - \frac{b}{\delta}\boxed{2} \\ \boxed{2} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{a} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2}(\frac{a}{\delta}) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Motsvarande följd av elementarmatriser fås genom att göra radoperationerna på en enhetsmatris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1}(\frac{1}{a}) \\ \boxed{2} \end{array} \sim E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad E_1^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} - c\boxed{1} \end{array} \sim E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} - \frac{b}{\delta}\boxed{2} \\ \boxed{2} \end{array} \sim E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{\delta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{\delta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2}(\frac{a}{\delta}) \end{array} \sim E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a}{\delta} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{a} \end{pmatrix}$$

Vi har därför

$$\begin{aligned} A &= E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{\delta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{a} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Det följer att

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a)(1)(1)(\delta/a) = \delta = ad - bc.$$

$\square$

- **Inverterbarhet och determinant.** Vi vet att varje kvadratisk matris $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ är radekvivalent med en reducerad trappmatris B. Det betyder att $A = E_1 \cdots E_k B$, där $E_1, \ldots, E_k$ är elementära matriser och B är en uppåt triangulär matris. Av det sista påståendet under föregående punkt följer att

$$\det A = (\det E_1) \cdots (\det E_k)(\det B)$$

Om A är inverterbar gäller $B = I_n$, vilket medför att $A = E_1 \cdots E_k$ och

$$\det A = (\det E_1) \cdots (\det E_k) \neq 0.$$

Om A inte är inverterbar är sista raden i B en nollrad, vilket medför att $\det B = 0$ och

$$\det A = (\det E_1) \cdots (\det E_k)(\det B) = 0.$$

Alltså är följande tre påståenden ekvivalenta:

- A är inverterbar.
- A kan skrivas som en produkt av elementära matriser.
- A har nollskild determinant.

- **Determinantproduktsatsen.** Denna säger att om A, B är två kvadratiska matriser av samma ordning så gäller

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) \tag{$*$}$$

Bevis. Om A inte är inverterbar så gäller detsamma för AB, av vilket följer att båda leden i $(*)$ är lika med noll. Om A är inverterbar så kan vi skriva

$$A = E_1 \cdots E_k$$

där $E_1, \ldots, E_k$ är elementära matriser. Det följer att

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1 \cdots E_k B) = (\det E_1)\det(E_2 \cdots E_k B) = \cdots \\ &= (\det E_1) \cdots (\det E_k)(\det B) = \det(E_1 \cdots E_k)(\det B) \\ &= (\det A)(\det B)\end{aligned}$$

□

Om $B = A^{-1}$ ger $(*)$

$$1 = \det I = \det(A\,A^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1}) \quad \Longrightarrow \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

- **Determinanten av transponatet.** För varje kvadratisk matris A gäller att

$$\det(A^T) = \det A.$$

Bevis. Först observerar vi att om E är en elementär matris så är även E^T en elementär matris med samma determinant. Om A inte är inverterbar så gäller detsamma för A^T, av vilket följer att $\det(A^T) = 0 = \det A$. Om A är inverterbar så kan vi skriva

$$A = E_1 \cdots E_k$$

där $E_1, \ldots, E_k$ är elementära matriser. Det följer att

$$A^T = E_k^T \cdots E_1^T$$

$$\det(A^T) = \det(E_k^T) \cdots \det(E_1^T) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) = \det A.$$

□

Av denna sats följer genast att ovanstående regler för hur determinanten påverkas vid radoperationer gäller oförändrade för kolonnoperationer. Exempelvis: Om matrisen B fås genom att en multipel av en kolonn i matrisen A adderas till en annan kolonn i A så gäller $\det B = \det A$.

- **Determinantens definition.** Vi har ovan räknat upp en rad egenskaper hos determinantfunktionen, som tillsammans gör att vi nu effektivt kan beräkna determinanten av en matris. Än så länge vilar dock detta på lös grund eftersom vi underlåtit att **definiera** determinanten. I läroboken gör man en definition som beror på en sats som aldrig bevisas. Det är även si och så med bevisen av determinanträknereglerna.

  Det klassiska sättet att definiera determinanten är som följer: Först definieras determinanten av en (generaliserad) **diagonalmatris**. Exempel på sådana matriser är

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  För en diagonalmatris gäller alltså att det i varje rad eller kolonn finns **högst** ett nollskilt tal. Determinanten av en diagonalmatris definieras som noll om matrisen har en nollrad (vilket är ekvivalent med att den har en nollkolonn). Annars definieras den som plus eller minus produkten av de nollskilda talen i matrisen. Det betyder att

$$\det C = \pm bc, \quad \det B = \pm b_{12}b_{23}b_{31}, \quad \det \Delta = \pm a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$$

  För att avgöra tecknet (plus eller minus) framför produkten går man igenom raderna och räknar, för det nollskilda elementet i varje rad, hur många av de nollskilda elementen i de nedanliggande raderna som befinner sig snett ner till vänster. När detta är gjort adderar man de funna antalen och får ett heltal N. Om N är jämnt ska man sätta ett plustecken framför produkten. Om N är udda ska ett minustecken sättas framför produkten.

  I matrisen C befinner sig talet c snett ner till vänster i förhållande till talet b, vilket ger $N = 1$. Det betyder att $\det C = -bc$.

  I matrisen B befinner sig b_{31} snett ner till vänster i förhållande till b_{12} och b_{23}, vilket ger $N = 2$. Alltså har vi $\det B = b_{12}b_{23}b_{31}$.

  I matrisen Δ befinner sig a_{32} och a_{41} snett ner till vänster i förhållande till a_{13} och a_{24}. Elementet a_{41} befinner sig också snett ner till vänster i förhållande till a_{32}. Sammantaget ger detta $N = 2 + 2 + 1 = 5$. Det betyder att $\det \Delta = -a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$.

  Alternativt kan man räkna hur många radbyten som behövs för att $a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41}$ ska hamna längs huvuddiagonalen. Vi får, genom ett radbyte i taget

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \end{pmatrix}$$

Vi räknar till tre radbyten. Eftersom tre är ett udda tal har vi $\det \Delta = -a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$.

Antag nu att $A = (a_{ij})$ är en godtycklig $n \times n$-matris. Vi säger att vi plockar ut en diagonalmatris Δ ur A om raderna i Δ fås genom att man i varje rad i A behåller ett av elementen, medan alla de övriga byts ut mot nollor. Observera att man, för att få en diagonalmatris, måste se till att inget par av de behållna elementen befinner sig i samma rad eller samma kolonn. Matrisen Δ ovan är, till exempel, en av de diagonalmatriser som kan plockas ut ur matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Hur många diagonalmatriser kan plockas ut ur ovanstående 4×4-matris A? I varje rad ska man behålla ett av elementen. Det betyder att vi i första raden kan välja att behålla vilket som helst av de fyra elementen. När detta är gjort har vi bara tre element att välja bland i andra raden, eftersom vi inte kan välja elementet som befinner sig i samma kolonn som det valda elementet i första raden. Efter det finns det bara två element att välja bland i tredje raden, eftersom två av de fyra kolonnerna redan är upptagna av elementen vi valde ur de två första raderna. Slutligen finns det, av samma skäl, bara ett element man kan välja att behålla ur den fjärde raden. Totalt finns det alltså

$$(4)(3)(2)(1) = 4! = 24$$

diagonalmatriser man kan plocka ut ur en 4×4-matris. På samma sätt inses att det finns totalt

$$(n)(n-1)\cdots(2)(1) = n!$$

diagonalmatriser som man kan plocka ut ur en $n \times n$-matris.

Determinanten av en godtycklig $n \times n$-matris A kan nu definieras genom

$$\det A = \sum_{\Delta \in \delta(A)} \det(\Delta)$$

där $\delta(A)$ betecknar mängden av alla diagonalmatriser som man kan plocka ut ur A. Av definitionen följer genast att om A har en nollrad eller en nollkolonn så gäller $\det A = 0$.

- **Exempel.**

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = ad - bc.$$

- **Exempel.** Visa att determinanten av en triangulär matris är lika med produkten av elementen i huvuddiagonalen.

Lösning. För enkelhetens skull antar vi att det är fråga om en uppåt triangulär 4×4-matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

En diagonalmatris som vi kan plocka ut ur A är

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

Då inget av elementen a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} befinner sig snett ner till vänster i förhållande till ett annat av dessa element så gäller det $D = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$. Eftersom alla diagonalmatriser Δ som kan plockas ur A innehåller ett tal ur varje kolonn i A kommer $\det(\Delta) = 0$ om vi inte väljer a_{11} ur den första kolonnen. På samma sätt är det klart att $\det(\Delta) = 0$ om vi inte väljer a_{22} ur den andra kolonnen. Vi kan ju inte välja a_{12} eftersom det elementet befinner sig i första raden där vi redan tvingats välja a_{11}. Samma argument tvingar oss att välja a_{33} ur kolonn tre och a_{44} ur kolonn fyra, ty annars får vi garanterat $\det(\Delta) = 0$. Alltså har vi

$$\det A = \sum_{\Delta \in \delta(A)} \det(\Delta) = \det D = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

Ovanstående resonemang fungerar på triangulära matriser av godtycklig ordning. $\square$

- **Radbytessatsen.** Om matrisen B fås genom att två rader i A byter plats så gäller $\det A = -\det B$.

Bevis. Antag till att börja med att A är en diagonalmatris. Då är även B en diagonalmatris. Om A innehåller en nollrad gäller detsamma för B, vilket ger $\det A = 0 = -\det B$. Ta nu fallet då A saknar nollrad (alla diagonalelementen är nollskilda) och att det behövs ett udda antal radbyten för att placera de nollskilda talen längs huvuddiagonalen. Om två rader byter plats, varvid B uppstår, kommer det att behövas ett jämnt antal radbyten för att placera de nollskilda talen längs huvuddiagonalen. För att inse detta börjar vi med att byta tillbaka de två raderna som nyss bytte plats, så att vi återfår A. Därefter fortsätter vi med ett det udda antal radbyten som behövs för att få de nollskilda talen längs huvuddiagonalen. Men ett udda tal plus ett ger ett jämnt tal. Det betyder att $\det A = -\det B$. Om det i stället behövs ett jämnt antal radbyten för att placera de nollskilda talen i A längs huvuddiagonalen kommer det, på samma sätt, att behövas ett udda antal radbyten för att placera de nollskilda talen i B längs huvuddiagonalen. Återigen får vi $\det A = -\det B$.

Antag nu att A är en godtycklig kvadratisk matris och att matrisen B uppstår genom att raderna r och s byter plats. Vi har då

$$\det A = \sum_{\Delta \in \delta(A)} \det(\Delta)$$

där $\delta(A)$ betecknar mängden av alla diagonalmatriser som man kan plocka ut ur A. För varje $\Delta \in \delta(A)$ låter vi Δ' beteckna diagonalmatrisen som uppstår då raderna r och s i Δ byter plats. Vi visade ovan att $\det(\Delta') = -\det(\Delta)$. Eftersom $\delta(B) = \{\Delta' \mid \Delta \in \delta(A)\}$ gäller att

$$\det B = \sum_{\Delta \in \delta(A)} \det(\Delta') = \sum_{\Delta \in \delta(A)} -\det(\Delta) = -\det A.$$

$\square$

- **Linearitetssatsen för rader.** Antag att de tre matriserna A, A', A'' är identiska förutom att

$$\mathbf{a}_r = \lambda \mathbf{a}'_r + \mu \mathbf{a}''_r$$

där λ, μ är skalärer och $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}'_r, \mathbf{a}''_r$ är de r:te raderna i A, A' respektive A''. Då gäller

$$\det A = \lambda \det(A') + \mu \det(A'')$$

Bevis. Antag först att A, A', A'' är diagonalmatriser. För elementen, $a_{rj}, a'_{rj}, a''_{rj}$ i rad r gäller då att $a_{rj} = \lambda a'_{rj} + \mu a''_{rj}$. För alla $i \neq r$ och alla j gäller att $a_{ij} = a'_{ij} = a''_{ij}$. Om diagonalelementen i de tre matriserna är på platserna $(1, j_1), \ldots, (r, j_r), \ldots, (n, j_n)$ och vi sätter

$$p = \sigma a_{1,j_1} \cdots a_{r-1,j_{r-1}} a_{r+1,j_{r+1}} \cdots a_{n,j_n}$$

där $\sigma = \pm$ är tecknet som ska sättas framför produkten av diagonalelementen, så gäller

$$\det A = p a_{r,j_r} \quad \det(A') = p a'_{r,j_r} \quad \det(A'') = p a''_{r,j_r}$$

Eftersom $a_{r,j_r} = \lambda a'_{r,j_r} + \mu a''_{r,j_r}$ följer att

$$\det A = \lambda \det(A') + \mu \det(A'')$$

I det allmänna fallet har vi

$$\det A = \sum_{\Delta \in \delta(A)} \det(\Delta) \quad \det A' = \sum_{\Delta' \in \delta(A')} \det(\Delta') \quad \det A'' = \sum_{\Delta'' \in \delta(A'')} \det(\Delta'')$$

där matriserna $\Delta, \Delta', \Delta''$ är identiska förutom att

$$(r\text{:te raden i } \Delta) = \lambda\,(r\text{:te raden i } \Delta') + \mu\,(r\text{:te raden i } \Delta'')$$

vilket, enligt ovan, medför att

$$\det(\Delta) = \lambda \det(\Delta') + \mu \det(\Delta'')$$

Det följer att

$$\det A = \lambda \det(A') + \mu \det(A'')$$

□

- **Minorer.** Låt A vara en $n \times n$-matris. För $1 \leq r \leq n$, $1 \leq k \leq n$ definieras minoren M_{rk} som determinanten av den $(n-1) \times (n-1)$-matris som återstår då man stryker rad r och kolonn k i A. Om, till exempel,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

så har vi

$$\begin{array}{lll} M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, & M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, & M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, & M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, & M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\ M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, & M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \end{array}$$

Matrisen med alla minorer är

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Kofaktormatrisen.** Kofaktormatrisen C fås genom att man tar matrisen med alla minorer och byter tecken på alla element M_{ij} sådana att $i+j$ är udda (schackbrädet). Om A är som ovan får vi, till exempel,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Utveckling efter rad eller kolonn.** Om vi fortsätter exemplet ovan ser vi att

$$\begin{aligned} 4 &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \\ &= \det A. \end{aligned}$$

Detta gäller även allmänt: För en godtycklig $n \times n$-matris A och för godtyckliga $1 \leq r \leq n$, $1 \leq k \leq n$, har vi

$$\begin{aligned} \det A &= a_{r1}C_{r1} + a_{r2}C_{r2} + \cdots + a_{rn}C_{rn} && (*r) \\ &= a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} && (*k) \end{aligned}$$

Determinanten fås genom utveckling efter rad r eller kolonn k. Beviset för detta fås genom användning av linearitetssatsen: Rad r i matrisen A kan skrivas som summan av radvektorerna $(a_{r1}, 0, \ldots, 0)$, $(0, a_{r2}, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, a_{rn})$. Låt $A^{(k)}$ beteckna matrisen som är identisk med A, förutom att rad r är $(0, \ldots, 0, a_{rk}, 0, \ldots, 0)$. Enligt linearitetssatsen gäller då att

$$\det A = \det A^{(1)} + \cdots + \det A^{(k)} + \cdots + \det A^{(n)}$$

En godtycklig term i högerledet är

$$\det A^{(k)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{r-1,1} & \cdots & a_{r-1,k-1} & a_{r-1,k} & a_{r-1,k+1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{rk} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,k-1} & a_{r+1,k} & a_{r+1,k+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \cdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{r+k} \begin{vmatrix} a_{rk} & \vec{0} \\ \vdots & M_{rk} \end{vmatrix} = (-1)^{r+k} a_{rk} M_{rk} = a_{rk} C_{rk}$$

där M_{rk} är minoren som fås då rad r och kolonn k stryks i A. Faktorn $(-1)^{r+k}$ uppkommer på grund av att vi i $A^{(k)}$ flyttar rad r $r-1$ steg uppåt och kolonn k $k-1$ steg åt vänster. De båda sista likheterna följer av determinantdefinitionen och att $C_{rk} = (-1)^{r+k} M_{rk}$.

Av $(*r)$ och $(*k)$ följer också att

$$\begin{aligned} 0 &= a_{r1}C_{s1} + a_{r2}C_{s2} + \cdots + a_{rn}C_{sn} \qquad &\text{då } r \neq s \\ &= a_{1j}C_{1k} + a_{2j}C_{2k} + \cdots + a_{nj}C_{nk} \qquad &\text{då } j \neq k \end{aligned}$$

Av detta följer slutligen att om $\operatorname{adj}(A)$ (den till A adjungerade matrisen) betecknar transponatet till kofaktormatrisen C så gäller

$$A \operatorname{adj}(A) = (\det A) I_n \tag{\#}$$

Vi ser av (#) att A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$, i vilket fall

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$$

Detta är dock, i allmänhet, ett ineffektivt sätt att beräkna inversen.