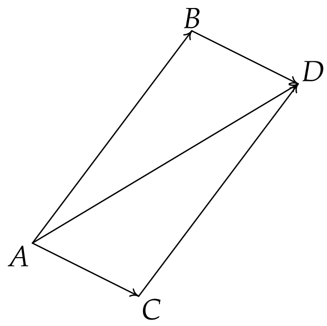
Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

LAoG I, 5 hp
ES1, KandMa1, MatemA
2012-09-06

Sammanfattning av föreläsningarna 8 - 12.

Föreläsningarna 8–12, 27/9–5/10 2012: Här handlar det om om vektorer, plan och räta linjer. Denna del av kursen brukar, tillsammans med ekvationssystem innehållande en eller flera parametrar, av studenterna uppfattas som den svåraste. För att förståelsen ska infinna sig är det nödvändigt att du uppövar din förmåga att rita figurer.

- **Vektorer.** En vektor (i planet eller rummet) ser vi som en pil (längd och riktning). Vektorn från punkten A till punkten B anges som $\overrightarrow{AB}$. Vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ är lika, vilket skrivs $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, om och endast om $ABDC$ (i den ordningen) är en parallellogram.



En vektor kan alltså parallellförflyttas så att den startar (eller slutar) i vilken punkt som helst. Vektorer adderas enligt regeln

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$$

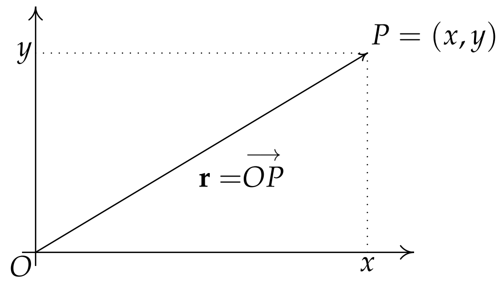
Om $ABDC$ är en parallellogram så gäller $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ och $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$, vilket visar att vektoraddition är kommutativ; $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$. Nollvektorn är $\vec{0}=\overrightarrow{AA}$, där A är vilken punkt som helst. Nollvektorn uppfyller $\mathbf{u}+\vec{0}=\vec{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, för en godtycklig vektor $\mathbf{u}$. Den motsatta vektorn till vektorn $\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}$ är $-\mathbf{v}=\overrightarrow{BA}$ och uppfyller $-\mathbf{v}+\mathbf{v}=\vec{0}$. Vektorer kan även multipliceras med skalärer (tal). Läs i läroboken om räknereglerna för vektorräkning. Kortfattat kan man säga att de är identiska med reglerna för matrisaddition kombinerat med multiplikation av en matris med en skalär.

- **Koordinater och komponenter.** För att effektivt kunna räkna med punkter och vektorer inför vi ett Cartesiskt koordinatsystem Oxy (i planet) eller $Oxyz$ (i rummet). Varje punkt P har då entydiga koordinater (x, y) (i planet) eller (x, y, z) (i rummet). Vi skriver $P=(x, y)$ och $P=(x, y, z)$ för att ange att P är punkten med koordinaterna (x, y) respektive (x, y, z).

Exempelvis har vi $O = (0,0)$ (i planet) eller $O = (0,0,0)$ (i rummet). Vektorn $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ kallas för **lägesvektorn** för punkten P och vi skriver

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y)^T \quad \text{eller} \quad \mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x,y,z)^T$$

och säger att vektorn $\mathbf{r}$ har **komponenterna** x, y respektive x, y, z. Komponenterna för lägesvektorn till en punkt är alltså identiska med koordinaterna för punkten.



Varje vektor $\mathbf{v}$ kan ses som lägesvektorn för en unik punkt och har alltså unika komponenter v_1, v_2 (i planet) eller v_1, v_2, v_3 (i rummet). Räknandet med komponenter fungerar på bästa sätt: Om $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ och λ är en skalär så gäller

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \lambda \mathbf{u} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix}$$

- **Punkt minus punkt.** Mellan två punkter $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ går den unika vektorn

  $$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

  Vi anger detta genom att skriva $\mathbf{v} = P_2 - P_1$. Exempelvis

  $$(1,2,3) - (2,-1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **Punkt plus vektor.** Om man startar i P_1 och förflyttar sig längs vektorn $\mathbf{v}$ ovan så hamnar man i P_2. Vi anger detta genom att skriva

  $$P_1 + \mathbf{v} = P_2$$

  Exempelvis

  $$(1,2,3) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = (2,0,-1)$$

- **Längden (normen) av en vektor.** Denna definieras som

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad \text{då} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad \text{då} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

  Normen uppfyller regeln $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$. Avståndet mellan två punkter P och Q ges av $\| \overrightarrow{PQ} \|$ (avståndsformeln).

- **Skalärprodukten.** Skalärprodukten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, av två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, definieras genom

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

  i planet ($\mathbb{R}^2$) och

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

  i rummet ($\mathbb{R}^3$). Observera de enkla men viktiga sambanden

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} \quad \text{och} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$$

  Med hjälp av cosinussatsen för trianglar och avståndsformeln visar man att

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$$

  där α är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ($0 \le \alpha \le \pi$).

  Skalärprodukten generaliseras till $\mathbb{R}^n$ (rummet av kolonnmatriser med n komponenter) genom

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

  Skalärprodukten är

Symmetrisk:	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
Additiv:	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
Homogen:	$(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
Positiv:	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0 \iff \mathbf{u} \neq \vec{0}$

  Normen (längden) av en vektor definieras genom $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$. Positiviteten hos skalärprodukten innebär att bara nollvektorn har längden 0.

- **Cauchy-Schwarz olikhet.** Av ovanstående fyra egenskaper hos skalärprodukten följer att för två godtyckliga vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ gäller olikheten

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \le (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \quad \iff \quad |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

  Vi har likhet i denna olikhet , $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$, om och endast om vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella (en av vektorerna är en multipel av den andra).

Bevis. Om $\mathbf{u} = \vec{0}$ eller $\mathbf{v} = \vec{0}$ är båda leden i olikheten noll (och $0 \leq 0$ är ju sant). Alltså kan vi anta att båda vektorerna är nollskilda. Vi sätter

$$A = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} > 0, \quad B = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \quad C = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} > 0.$$

Av skalärproduktens fyra egenskaper följer att för varje $t \in \mathbb{R}$ gäller

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\mathbf{u}t - \mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}t - \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\, t^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\, t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ &= At^2 - 2Bt + C \end{aligned}$$

Andragradspolynomet $p(t) = At^2 - 2Bt + C$ har minimum då $0 = p'(t) = 2At - 2B$, alltså då $t = t_0 = B/A$. Polynomets minimivärde är

$$p(t_0) = At_0^2 - 2Bt_0 + C = \frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C = C - \frac{B^2}{A} = \frac{AC - B^2}{A}$$

Polynomet antar, enligt ovan, inga negativa värden. Alltså har vi $AC - B^2 \geq 0$ och $AC - B^2 = 0$ om och endast om

$$0 = p(t_0) = (\mathbf{u}t_0 - \mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}t_0 - \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}t_0 - \mathbf{v}\|^2 \quad \iff \quad \mathbf{v} = t_0\mathbf{u},$$

alltså om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella. □

Cauchy-Schwarz olikhet gör det möjligt för oss att definiera vinkeln α mellan två nollskilda vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som

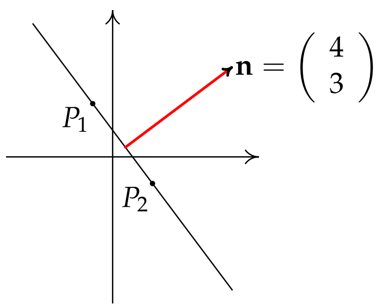
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$

Det gäller alltid att $0 \leq \alpha \leq \pi$. Dessutom har vi

$$\begin{aligned} \alpha < \frac{\pi}{2} &\quad\iff\quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} &\quad\iff\quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \\ \alpha > \frac{\pi}{2} &\quad\iff\quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0 \end{aligned}$$

- **Exempel.** Visa att vektorn $\mathbf{n} = (4,3)^T$ är vinkelrät mot linjen med ekvationen $4x + 3y = c$.

Lösning. Låt $P_1 = (x_1, y_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2)$ vara två punkter på linjen.



För punkterna gäller $4x_1 + 3y_1 = c$ och $4x_2 + 3y_2 = c$. Subtraherar vi den vänstra ekvationen från den högra får vi

$$0 = 4(x_2 - x_1) + 3(y_2 - y_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}$$

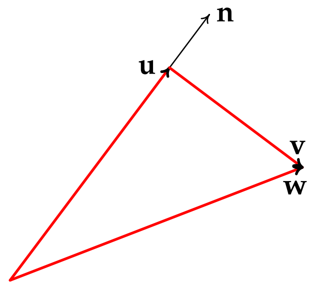
Varje vektor parallell med linjen är alltså vinkelrät mot $\mathbf{n}$. Alltså är linjen vinkelrät mot $\mathbf{n}$. $\square$

På samma sätt gäller att en linje är vinkelrät mot $\mathbf{n} = (a, b)^T$ om och endast om den har en ekvation på formen $ax + by = c$.

- **Exempel.** Bestäm en ekvation för linjen genom $(-1, 8)$ som är vinkelrät mot $\mathbf{n} = (4, 1)^T$.

  Lösning. Linjen har en ekvation på formen $4x + y = c$. Eftersom $(-1, 8)$ ligger på linjen får vi $c = -4 + 8 = 4$. En ekvation för linjen är därför $4x + y = 4$. $\square$

- **Projektionen av en vektor längs en vektor.** Här har vi en given vektor $\mathbf{n} \neq \vec{0}$ (i planet eller rummet) och problemet är att skriva en godtycklig vektor $\mathbf{w}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där vektorn $\mathbf{u}$ ska vara parallell med $\mathbf{n}$ och vektorn $\mathbf{v}$ ska vara vinkelrät mot $\mathbf{n}$:



Eftersom $\mathbf{u}$ är parallell med $\mathbf{n}$ finns ett tal λ sådant att $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{n}$. Det följer att $\mathbf{v} = \mathbf{w} - \lambda \mathbf{n}$ och då $\mathbf{v}$ ska vara vinkelrät mot $\mathbf{n}$ får vi

$$0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{w} - \lambda \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} - \lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}.$$

Alltså gäller

$$\lambda = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}(\mathbf{n}^T \mathbf{w}) = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{n} \mathbf{n}^T) \mathbf{w}$$

Vektorn $\mathbf{u}$ sägs vara projektionen av vektorn $\mathbf{w}$ längs (eller på) $\mathbf{n}$ och vi betecknar den med $\mathbf{w}_{\mathbf{n}}$. Det sista uttrycket för $\mathbf{u} = \mathbf{w}_{\mathbf{n}}$

$$\mathbf{w}_{\mathbf{n}} = \mathbf{u} = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{n} \mathbf{n}^T) \mathbf{w} = A \mathbf{w} \quad \text{där} \quad A = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{n} \mathbf{n}^T)$$

är intressant. För varje vektor $\mathbf{w}$ ges projektionen av $\mathbf{w}$ längs $\mathbf{n}$ av $\mathbf{w}_{\mathbf{n}} = A \mathbf{w}$. Den kvadratiska matrisen A beror bara på $\mathbf{n}$ och uppfyller

$$A^T = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{n} \mathbf{n}^T)^T = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{n}^T)^T \mathbf{n}^T = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{n} \mathbf{n}^T) = A$$

$$A^2 = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-2}(\mathbf{n}\mathbf{n}^T)(\mathbf{n}\mathbf{n}^T) = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-2}\mathbf{n}(\mathbf{n}^T\mathbf{n})\mathbf{n}^T = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}\mathbf{n}\mathbf{n}^T = A$$

A är symmetrisk ($A^T = A$) och idempotent ($AA = A$). En sådan matris kallas för en projektionsmatris.

I planet har vi $\mathbf{n} = (a,b)^T$, vilket ger $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = a^2 + b^2$ och

$$A = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(a\ b) = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

I rummet har vi $\mathbf{n} = (a,b,c)^T$, vilket ger $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = a^2 + b^2 + c^2$ och

$$A = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(a\ b\ c) = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

- **Exempel.** Låt $\mathbf{n} = (1,-1,1)^T$. Bestäm projektionerna längs $\mathbf{n}$ av vektorerna $\mathbf{w} = (1,2,3)^T$ och $\mathbf{r} = (2,3,1)^T$

  Lösning. Vi bestämmer först matrisen A för projektionen längs $\mathbf{n}$:

  $$A = \frac{1}{1+1+1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,\ -1,\ 1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Projektionen av $\mathbf{w} = (1,2,3)^T$ är

  $$\mathbf{w}_\mathbf{n} = A\mathbf{w} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

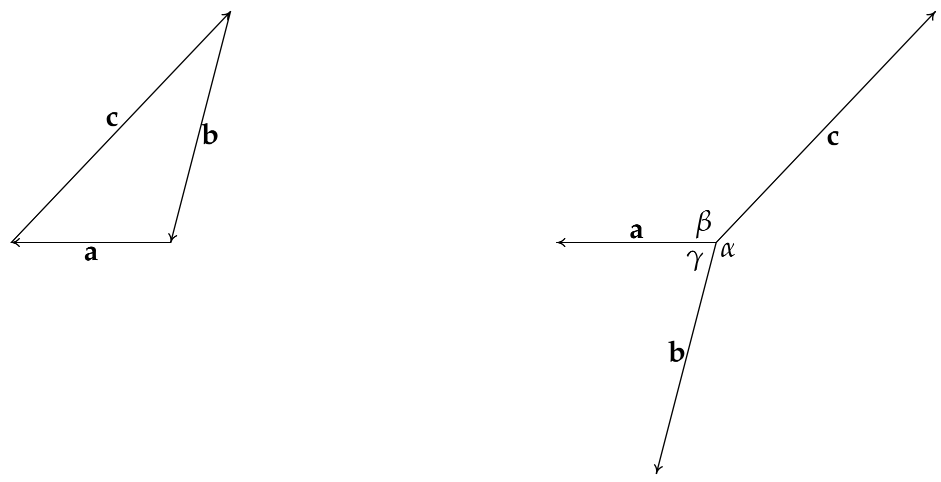
  Projektionen av $\mathbf{r} = (2,3,1)^T$ är

  $$\mathbf{r}_\mathbf{n} = A\mathbf{r} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Att projektionen av $\mathbf{r} = (2,3,1)^T$ är nollvektorn innebär att $\mathbf{r}$ är vinkelrät mot $\mathbf{n}$. $\square$

- **Exempel.** För vektorerna $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ gäller att $\|\mathbf{a}\| = 2$, $\|\mathbf{b}\| = 3$, $\|\mathbf{c}\| = 4$ och $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \vec{0}$. Bestäm $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ samt vinklarna mellan vektorerna.

  Lösning. Att vektorsumman är noll betyder att när vi lägger vektorerna svans vid spets, som i den vänstra figuren, bildas en triangel. Låt γ vara vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. Låt β vara vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{c}$ och låt slutligen α vara vinkeln mellan $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$. Se på den högra figuren, där vektorerna lagts med svansarna i samma punkt.



Genom att ta skalärprodukten av båda leden, i likheten $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\vec{0}$, med $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ respektive $\mathbf{c}$ får vi

$$\begin{aligned}
0=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} &= 4+6\cos\gamma+8\cos\beta\\
0=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} &= 6\cos\gamma+9+12\cos\alpha\\
0=\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} &= 8\cos\beta+12\cos\alpha+16
\end{aligned}$$

vilket ju är ett linjärt ekvationssystem med $\cos\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$ som obekanta. Löser vi detta (gör det!) så får vi

$$\cos\gamma=\frac{1}{4},\quad \cos\beta=-\frac{11}{16},\quad \cos\alpha=-\frac{7}{8}.$$

Alltså gäller

$$\gamma=\arccos\frac{1}{4},\quad \beta=\arccos\left(-\frac{11}{16}\right),\quad \alpha=\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$$

och

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{(2)(3)}{4}=\frac{3}{2},\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\frac{(2)(4)(-11)}{16}=-\frac{11}{2},\quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\frac{(3)(4)(-7)}{8}=-\frac{21}{2}.$$

□

- **Exempel.** Låt **a** och **c** vara som i föregående exempel. Bestäm projektionen av **a** längs **c** och projektionen av **c** längs **a**.

Lösning. Enligt ovan har vi

$$\mathbf{a}_{\mathbf{c}}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}\,\mathbf{c}=\frac{-\frac{11}{2}}{16}\,\mathbf{c}=-\frac{11}{32}\,\mathbf{c},\quad \mathbf{c}_{\mathbf{a}}=\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}=\frac{-\frac{11}{2}}{4}\,\mathbf{a}=-\frac{11}{8}\,\mathbf{a}.$$

□

- **Plan.** En standardekvation (eller normalekvation) för ett plan är $ax + by + cz + d = 0$. Vektorn
$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k},$$
$\mathbf{i} = (1,0,0)^T$, $\mathbf{j} = (0,1,0)^T$, $\mathbf{k} = (0,0,1)^T$, är en normal till planet. Ekvationen kan också skrivas som $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + d = 0$, där $\mathbf{r} = (x,y,z)^T$ är lägesvektorn för en godtycklig punkt på planet.

  Planet delar rummet i två "halvor", så kallade halvrum. Punkterna som ligger i halvrummet som $\mathbf{n}$ pekar in i (det positiva halvrummet) ges av olikheten $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + d > 0$, d.v.s $ax + by + cz + d > 0$. Punkterna i det andra halvrummet (det negativa halvrummet) ges av olikheten $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + d < 0$, d.v.s $ax + by + cz + d < 0$.

- **Exempel.** Avgör om punkterna $(1,-1,1)$ och $(5,5,2)$ ligger på samma sida av planet $x - 2y + 3z - 4 = 0$.

  Lösning. Vi har
$$(1) - 2(-1) + 3(1) - 4 = 2 > 0 \quad \text{och} \quad (5) - 2(5) + 3(2) - 4 = -3 < 0$$
  Den första punkten ligger därför på den positiva sidan av planet, medan den andra punkten ligger på den negativa sidan av planet. Punkterna ligger alltså inte på samma sida. □

  Ekvationen $-ax - by - cz - d = 0$ beskriver samma plan som ekvationen $ax + by + cz + d = 0$. Vilken sida som är positiv beror på vilken ekvation vi väljer. Om vi i exemplet hade valt ekvationen $-x + 2y - 3z + 4 = 0$ för planet hade den första punkten legat på den negativa sidan medan den andra punkten hade legat på den positiva sidan.

- **Räta linjer.** En ekvation på vektorform för den räta linjen genom punkten (x_0, y_0, z_0) som är parallell med vektorn $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}$ ges av
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_1 t \\ y_0 + v_2 t \\ z_0 + v_3 t \end{pmatrix}, \qquad -\infty < t < \infty.$$
  Mer kompakt: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$, $\infty < t < \infty$. Man kallar $\mathbf{v}$ för en riktningsvektor för linjen.

- **Skärning linje-plan.** Om $\mathbf{v}$ ej är vinkelrät mot $\mathbf{n}$ så skär linjen $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$ planet $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} + d = 0$ i en unik punkt. Lägesvektorn $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau\,\mathbf{v}$, för skärningspunkten, uppfyller även ekvationen
$$0 = d + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = d + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_0 + \tau\,\mathbf{v}).$$
  Alltså
$$0 = d + \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0 + \tau\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{d + \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \frac{d + \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}\,\mathbf{v}.$$
  Avståndet δ, från $\mathbf{r}_0$ till skärningspunkten $\mathbf{r}$, är därför
$$\delta = \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\| = \frac{|d + \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0|\,\|\mathbf{v}\|}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|}$$

- **Avståndet punkt-plan.** Om vi låter $\mathbf{v} = \mathbf{n}$ så går linjen vinkelrätt mot planet och skär planet i den punkt som ligger närmast $\mathbf{r}_0$. Det betyder att skärningspunkten är

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \frac{d + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\,\mathbf{n}$$

och avståndet δ, från $\mathbf{r}_0$ till planet, är

$$\delta = \frac{|d + \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0|\,\|\mathbf{n}\|}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}|} = \frac{|d + \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

- **Exempel.** Bestäm avståndet δ från punkten $(3, -2, 1)$ till planet $2x + 3y - 4z = 1$.

Lösning. Vi får

$$\delta = \frac{|2(3) + 3(-2) - 4(1) - 1|}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

□

- **Exempel.** Bestäm, för varje reellt värde på konstanten k, avståndet δ från punkten $\mathbf{r}_0 = (5, 5, 2)$ till planet $x - 2y + 2z = k$. Ange även den punkt på planet som ligger nämast $\mathbf{r}_0$.

Lösning. Enligt ovanstående formel för avståndet punkt - plan får vi

$$\delta = \frac{|(5) - 2(5) + 2(2) - k|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|-1 - k|}{3} = \frac{|k + 1|}{3}.$$

Speciellt ser vi att om $k = -1$ så är avståndet noll, d.v.s punkten $\mathbf{r}_0 = (5, 5, 2)$ ligger på planet.

Punkten på planet som ligger närmast $\mathbf{r}_0$ är

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{k - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\,\mathbf{n} = (5, 5, 2)^T + \frac{k + 1}{9}\,(1, -2, 2)^T = \left(\frac{46 + k}{9}, \frac{43 - 2k}{9}, \frac{20 + 2k}{9}\right)^T.$$

□

- **Avståndet punkt-linje.** På samma sätt som ovan får vi att avståndet δ från punkten (x_0, y_0) till linjen $ax + by + c = 0$ ges av

$$\delta = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- **Exempel.** Bestäm avståndet δ från punkten $(4, 1)$ till linjen $3x + 4y = 7$.

Lösning. Vi får

$$\delta = \frac{|3(4) + 4(1) - 7|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{9}{5} = 1.8.$$

□

- **Kryssprodukten.** Kryssprodukten (eller vektorprodukten) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, av två vektorer $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, definieras genom

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & u_1 & v_1 \\ \mathbf{j} & u_2 & v_2 \\ \mathbf{k} & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

  Kryssprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är en vektor som är vinkelrät mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Dessutom är vektorprodukten

Antisymmetrisk:	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
Additiv:	$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
Homogen:	$(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
Högerorienterad:	$\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ett högersystem, d.v.s $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}) \geq 0$.

  Närmare bestämt gäller att $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2$. Två vektorer, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, är parallella om och endast om $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \vec{0}$.

- **Exempel.** Bestäm alla vektorer som är vinkelräta mot $\mathbf{u} = (1, -2, 3)^T$ och $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^T$.

  Lösning. En vektor som är vinkelrät mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 1 & 1 \\ \mathbf{j} & -2 & 1 \\ \mathbf{k} & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

  Varje vektor som är vinkelrät mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallell med $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. De sökta vektorerna är alltså alla reella multiplar av vektorn $(-5, 2, 3)^T$. □

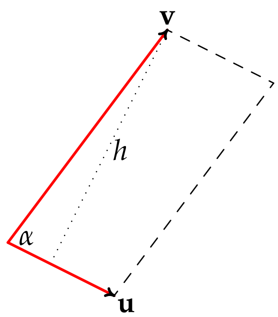
- **Exempel.** Ett plan går genom punkten $(-1, 0, 1)$ och är parallellt med de båda vektorerna $\mathbf{u} = (1, -2, 3)^T$ och $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^T$. Bestäm en ekvation för planet.

  Lösning. En normalvektor till planet är $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-5, 2, 3)^T$ (se ovan). En ekvation för planet ges därför av

$$0 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = -5x + 2y + 3z - 8.$$

  □

- **Arean av en parallellogram.** Två vektorer $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T, \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ spänner upp en parallellogram:



Arean av parallellogrammen är

$$A = \|\mathbf{u}\|\, h = \|\mathbf{u}\|\, \|\mathbf{v}\| \sin\alpha$$

Med hjälp av Lagranges identitet

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$$

och den tidigare visade likheten $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\alpha$ får vi

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1-\cos^2\alpha) = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\sin^2\alpha \\ &= A^2\end{aligned}$$

Det följer att $A = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$.

- **Exempel.** Bestäm arean A av parallellogrammen som spänns upp av $\mathbf{u} = (2,3,0)^T$ och $\mathbf{v} = (-1,2,-2)^T$.

  Lösning. Vi har här

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 2 & -1 \\ \mathbf{j} & 3 & 2 \\ \mathbf{k} & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

  Det följer att

$$A = \sqrt{36+16+49} = \sqrt{101}.$$

$\square$

- **Exempel.** Bestäm arean A av triangeln med hörn i punkterna $P = (1,-1,2)$, $Q = (0,3,4)$, $R = (6,1,8)$.

  Lösning. Låt

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

  Vi har

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & -1 & 5 \\ \mathbf{j} & 4 & 2 \\ \mathbf{k} & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ -22 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix}$$

  Triangelarean utgör hälften av arean av parallellogrammen som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Det ger oss

$$A = \|\tfrac{1}{2}\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \sqrt{100+64+121} = \sqrt{285}.$$

$\square$

- **Arean av en parallellogram i planet.** Två vektorer, $\mathbf{u} = (u_1,u_2)^T$, $\mathbf{v} = (v_1,v_2)^T$, i planet spänner också upp en parallellogram. För att beräkna arean A av denna identifierar vi de båda vektorerna med rumsvektorerna $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)^T, \mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)^T$ och använder ovanstående formel. Vi får

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & u_1 & v_1 \\ \mathbf{j} & u_2 & v_2 \\ \mathbf{k} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

vilket ger

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

där 'abs' står för absolutbeloppet. Alltså

$$A = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right| = |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})|$$

- **Exempel.** Bestäm arean A av triangeln med hörn i punkterna $P = (1, 2)$, $Q = (4, 0)$, $R = (3, 4)$.

  Lösning. Vi får

  $$\pm 2A = \det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10,$$

  vilket ger $A = 5$. □

- **Trippelprodukten.** Analogt med ovanstående gäller att volymen V av parallellepipeden som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T, \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T, \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ ges av

  $$V = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \right| = |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|$$

  Trippelprodukten $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ av tre vektorer i rummet definieras genom

  $$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

  Man verifierar lätt att

  $$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

- **Fyra punkter i ett plan.** Av ovanstående följer att fyra punkter A, B, C, P ligger i ett plan om och endast om

  $$0 = \det(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

- **Exempel.** Utnyttja ovanstående för att bestämma en ekvation för planet genom de tre punkterna $A = (1, -1, 2)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (0, 2, -1)$.

  Lösning. Punkten $P = (x, y, z)$ ligger i samma plan som punkterna A, B, C om och endast om

  $$0 = \det(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+1 & 3 & 3 \\ z-2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-6)(x-1) + 7(y+1) + 9(z-2)$$

  □

- **Avståndet mellan parallella plan.** Avståndet δ mellan två parallella plan

$$ax + by + cz + d_1 = 0 \quad \text{och} \quad ax + by + cz + d_2 = 0$$

ges av

$$\delta = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{$*$}$$

Om vi tar en godtycklig punkt $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i det första planet så gäller att δ är lika med avståndet från P_1 till det andra planet. Alltså har vi

$$\delta = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Eftersom $ax_1 + by_1 + cz_1 = -d_1$ följer $(*)$. Tar vi även en punkt $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ i det andra planet så gäller $ax_2 + by_2 + cz_2 = -d_2$ och $(*)$ kan skrivas

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_2 - by_2 - cz_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + c(z_1 - z_2)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)|}{\|\mathbf{n}\|}\end{aligned}$$

där $\mathbf{n} = (a, b, c)^T$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ och $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$.

- **Avståndet mellan skeva linjer.** Avståndet δ mellan två linjer

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\,\mathbf{v}_1 \quad \text{och} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\,\mathbf{v}_2,$$

som ej är parallella, är lika med avståndet mellan de två parallella planen

$$ax + by + cz + d_1 = 0 \quad \text{och} \quad ax + by + cz + d_2 = 0,$$

där $\mathbf{n} = (a, b, c)^T = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, som innehåller punkterna $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ respektive $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Det innebär, enligt ovan, att

$$\delta = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|}.$$