Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Linjär algebra och geom. I, 5 hp
ES1, KandMa1, MatemA
2012-09-03

Kryssproblem (redovisningsuppgifter).

Till var och en av de tio lektionerna hör två problem som du ska försöka lösa.

I kursplaneringen, filen **kurspla1ht12.pdf** på kurshemsidan, beskrivs mer utförligt hur systemet med redovisningsuppgifter fungerar. Här påpekar vi bara följande:

Om du kryssat minst 50%, respektive minst 80%, av redovisningsuppgifterna får du 1, respektive 2, bonuspoäng. Dessa kommer att adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen.

Betyget du får på kursen kommer bara att bero på hur du lyckas på sluttentan. Betygen du får (eller ger) under lektionerna kommer inte att vägas in på något sätt. Givetvis kommer din aktivitet (eller brist på aktivitet) under lektionerna att i hög grad påverka ditt kursbetyg. Har du två bonuspoäng ligger du bra till!

Bonuspoängen adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen i oktober 2012 **men ej vid något annat tentamenstillfälle**.

Uppgifter till lektion 1:

Dessa båda problem kan förekomma på en baskurstenta, så det är fråga om en repetition.

1. (a) Bestäm en ekvation för linjen som går genom punkterna $(-1, 2)$ och $(3, 4)$.

(b) Bestäm en ekvation för linjen som går genom punkten $(-1, 2)$ och är vinkelrät mot linjen $3x + 4y = 5$.

2. Bestäm, med hjälp av avståndsformeln (Pythagoras sats), en ekvation för en av linjerna som går genom punkten $(-5, 0)$ och tangerar cirkeln $x^2 + y^2 = 16$.

Uppgifter till lektion 2:

1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lös det homogena ekvationssystemet vars matrisform är $(A \mid \vec{0})$. Bestäm den reducerade trappmatrisen som är radekvivalent med matrisen $(A \mid \vec{0})$. Vilka kolonner i denna är pivotkolonner? Vilka är pivotelementen?

2. Låt

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a+3 \\ 2a \\ -a-1 \\ -9a-5 \end{pmatrix}$$

där a är en reell konstant, och låt A vara som i föregående problem. Avgör för vilka värden på a som ekvationssystemet, med matrisformen $(A \mid \mathbf{b})$, är lösbart och lös systemet i sådana fall.

Uppgifter till lektion 3:

1. Lös, för alla värden på den reella konstanten a, ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & & & = & a \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & + & az & = & 4 \end{array} \right\}$$

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

– Bestäm alla värden på den reella konstanten a för vilka matrisen A är inverterbar och bestäm, i sådana fall, A:s invers.

– Sätt $a = 4$ i ovanstående matris A och skriv sedan A som en produkt av högst sex elementära matriser.

Uppgifter till lektion 4:

1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Beräkna $\det(A)$.

(b) Beräkna kofaktormatrisen C, till A.

(c) Ange den adjungerade matrisen $\text{adj}(A)$.

(d) Bestäm A^{-1}.

(e) Lös matrisekvationen $AXA^{-1} = B$, där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Lös ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ x & x & x & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \\ 2x & -1 & x & 0 \end{vmatrix}$$

Uppgifter till lektion 5:

1. Punkterna $A = (0,3,4)$ och $B = (-2,1,6)$ är varandras spegelbilder i planet Π. Bestäm en ekvation för Π. Bestäm även avståndet från origo till Π och den punkt på Π som ligger närmast origo.

2. Låt $A = (0,3,4)$ och $B = (4,-1,6)$. Linjen L går genom origo och är parallell med vektorn $\mathbf{v} = (1,1,1)^T$. Bestäm alla punkter C på linjen L, sådana att triangeln ABC blir rätvinklig.

Uppgifter till lektion 6:

1. Låt L_1 vara linjen genom punkterna $(1,0,3)$ och $(2,4,0)$. Låt L_2 vara skärningslinjen mellan planen $x+2y-2z=4$ och $3x+4y=2$. Bestäm avståndet δ mellan linjerna L_1 och L_2. Bestäm en ekvation för planet Π som innehåller L_1 och är parallellt med L_2. Bestäm alla punkter $P \in L_1$, $Q \in L_2$ sådana att $\| \overrightarrow{PQ} \| = \delta$.

2. Låt $OABC$ vara tetraedern med O i origo och $A = (4,0,3)$, $B = (-2,1,1)$, $C = (0,7,2)$. Bestäm arean av sidoytan OAB. Bestäm längden h av höjden från C mot sidoytan OAB. Bestäm alla punkter P på sidoytan OAB sådana att $\| \overrightarrow{CP} \| = h$. Bestäm volymen av tetraedern $OABC$.

Uppgifter till lektion 7:

1. Låt W vara det linjära höljet av vektorerna $(-1,3,2,2)^T$, $(1,0,-1,-7)^T$, $(-5,6,7,25)^T$, $(0,1,2,5)^T$ och $(2,-1,1,1)^T$. Bestäm en bas i W bland dessa vektorer. Utvidga den funna basen till en bas $\underline{b}$ i $\mathbb{R}^4$, med hjälp av standardbasvektorer. Bestäm komponenterna i basen $\underline{b}$ för de fem givna vektorerna och de fyra standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^4$.

2. Ett delrum L till $\mathbb{R}^5$ ges av $L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\mathbf{x} = \vec{0}\}$, där

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm en bas i L och utvidga den funna basen, med hjälp av standardbasvektorer, till en bas $\underline{c}$ i $\mathbb{R}^5$. Bestäm komponenterna i basen $\underline{c}$ för de fem standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^5$.

Uppgifter till lektion 8:

1. Bestäm matrisen för den linjära avbildningen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som geometriskt är en rotation 150° medurs. Beräkna $f(\mathbf{v})$ om (a) $\mathbf{v} = (1,1)^T$, (b) $\mathbf{v} = (1, \sqrt{3})^T$.

2. Låt $\mathbf{n} = (-2,1)^T$ och låt L vara den räta linjen genom origo som är vinkelrät mot $\mathbf{n}$. Bestäm matriserna P, Q, S för de linjära avbildningarna f, g, h, på $\mathbb{R}^2$, som geometriskt innebär den ortogonala projektionen på L, den ortogonala projektionen längs $\mathbf{n}$ respektive den ortogonala speglingen i L. Skriv vektorn $\mathbf{w} = (4,3)^T$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med L och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot L. Bestäm även $f(\mathbf{w})$, $g(\mathbf{w})$ och $h(\mathbf{w})$.

Uppgifter till lektion 9:

1. Låt $\mathbf{n} = (-2,1,1)^T$ och låt Π vara planet genom origo som är vinkelrätt mot $\mathbf{n}$. Bestäm matriserna P, Q, S för de linjära avbildningarna f, g, h, på $\mathbb{R}^3$, som geometriskt innebär den ortogonala projektionen på Π, den ortogonala projektionen längs $\mathbf{n}$ respektive den ortogonala speglingen i Π. Skriv vektorn $\mathbf{w} = (3,4,5)^T$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med Π och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot Π. Bestäm även $f(\mathbf{w})$, $g(\mathbf{w})$ och $h(\mathbf{w})$.

2. För den linjära avbildningen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gäller att

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

   Bestäm f:s standardmatris.

Uppgifter till lektion 10:

1. En flaggstång, representerad av vektorn $\mathbf{n} = (2,2,1)^T$, står (med svansen) i origo, vinkelrätt mot den plana marken. Solstrålarna faller in i riktningen av vektorn $(1,1,-3)^T$. Beräkna längden av flaggstångens skugga. Är skuggan längre än flaggstången?

2. Låt $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(1,-2,2)^T$. Tre linjära operatorer f, g, h på $\mathbb{R}^3$ ges av

$$f(\mathbf{v}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}, \quad g(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}, \quad h(\mathbf{v}) = \mathbf{n} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

   Visa att för alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ är $f(\mathbf{v}), g(\mathbf{v})$ och $h(\mathbf{v})$ vinkelräta mot varandra. Bestäm standardmatrisen $[h]$ för h. Bestäm alla vektorer $\mathbf{v}$ för vilka $\|h(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$.