Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Linjär algebra och geom. I, 5 hp
ES1, KandMa1, MatemA
2012-09-05

Lösningar till kryssproblemen.

Uppgifter till lektion 1:
Dessa båda problem kan förekomma på en baskurstenta, så det är fråga om en repetition.

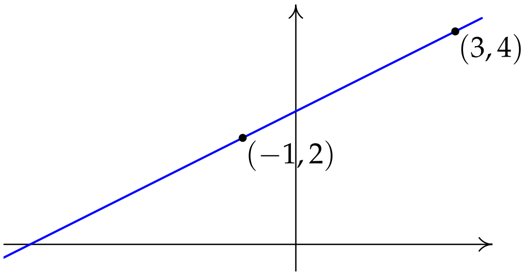
1. (a) Bestäm en ekvation för linjen som går genom punkterna $(-1, 2)$ och $(3, 4)$.
(b) Bestäm en ekvation för linjen som går genom punkten $(-1, 2)$ och är vinkelrät mot linjen $3x + 4y = 5$.

Lösning. (a) Linjens riktningskoefficient ges av

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{3+1} = \frac{1}{2}$$

Av enpunktsformeln, $y = y_1 + k(x - x_1)$, följer att en ekvation för linjen är

$$y = 2 + \tfrac{1}{2}(x+1) = \tfrac{1}{2}(x+5)$$



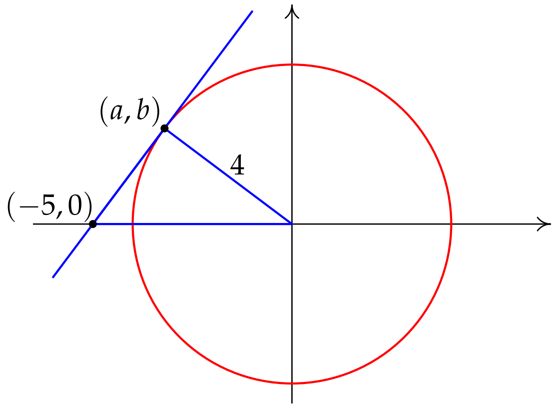
(b) Linjen $3x + 4y = 5$ har riktningskoefficienten $k_1 = -\frac{3}{4}$. Eftersom riktningskoefficienterna för vinkelräta linjer uppfyller $k_1 k_2 = -1$ följer att den sökta linjen har riktningskoefficienten $k_2 = \frac{4}{3}$. Enpunktsformeln ger ekvationen

$$y = 2 + \tfrac{4}{3}(x+1) = (4x+10)/3.$$

□

2. Bestäm, med hjälp av avståndsformeln (Pythagoras sats), en ekvation för en av linjerna som går genom punkten $(-5, 0)$ och tangerar cirkeln $x^2 + y^2 = 16$.

Lösning. Vi söker en punkt (a, b) på cirkeln sådan att linjen genom $(-5, 0)$ och (a, b) tangerar cirkeln $x^2 + y^2 = 16$ i (a, b). Triangeln i nedanstående figur är då rätvinklig vid (a, b), med hypotenusan 5 och en katet lika med 4 (cirkelradien).



Av Pythagoras sats följer att avståndet mellan $(-5, 0)$ och (a, b) är lika med 3. För (a, b) gäller alltså både att $a^2 + b^2 = 16$ (punkten ligger på cirkeln) och att $(a + 5)^2 + b^2 = 9$. Det följer att

$$16 - a^2 = b^2 = 9 - (a+5)^2 = -16 - 10a - a^2 \quad \Rightarrow \quad 10a = -32 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{16}{5}$$

$$b^2 = 16 - \frac{16^2}{5^2} = \frac{(16)(9)}{25} = \frac{12^2}{5^2} \quad \Rightarrow \quad b = \pm\frac{12}{5}$$

och tangentlinjen har riktningskoefficienten $-\frac{a}{b} = \pm\frac{4}{3}$. En ekvation för tangentlinjen är därför

$$y = \pm\tfrac{4}{3}(x + 5).$$

$\square$

Uppgifter till lektion 2:

1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lös det homogena ekvationssystemet vars matrisform är $(A \mid \vec{0})$. Bestäm den reducerade trappmatrisen som är radekvivalent med matrisen $(A \mid \vec{0})$. Vilka kolonner i denna är pivotkolonner? Vilka är pivotelementen?

Lösning. Med några radoperationer får vi

$$(A \mid \vec{0}) \sim (C \mid \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Av $(C \mid \vec{0})$ framgår att pivotkolonnerna i $(A \mid \vec{0})$ är $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_4$. Pivotelementen i $(C \mid \vec{0})$ är ettorna längst till vänster i första-, andra- och tredje raden.

Av $(C \mid \vec{0})$ framgår även att lösningarna till det homogena systemet $(A \mid \vec{0})$ ges av

$$x_1 = -2x_3 + x_5, \quad x_2 = 3x_3 - x_5, \quad x_4 = -2x_5 \quad \text{där} \quad x_3, x_5 \quad \text{är godtyckliga.}$$

Alltså har det homogena systemet lösningarna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 + x_5 \\ 3x_3 - x_5 \\ x_3 \\ -2x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

2. Låt

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a+3 \\ 2a \\ -a-1 \\ -9a-5 \end{pmatrix}$$

där a är en reell konstant, och låt A vara som i föregående problem. Avgör för vilka värden på a som ekvationssystemet, med matrisformen $(A \mid \mathbf{b})$, är lösbart och lös systemet i sådana fall.

Lösning. Systemet med matrisformen $(A \mid \mathbf{b})$ är lösbart om och endast om $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{b})$ är lösbart. Några radoperationer ger

$$(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} -1 & 1 & 0 & a+3 \\ 0 & 1 & 2 & a+5 \\ 0 & 0 & -5 & 2a-6 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$$

Av den sista raden i denna trappmatris ser vi att $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{b})$ är lösbart om och endast om $a = -2$. Vi sätter in detta värde på a och får

$$(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En lösning till $(A\,\mathbf{b})$ ges därför av

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 0.$$

Den allmänna lösningen till $(A \mid \mathbf{b})$ kan skrivas som summan av denna lösning och den allmänna lösningen till $(A \mid \vec{0})$, alltså (se lösningen till problem 1)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man kan alternativt lösa både problem 2 och problem 1 i ett svep. Med några radoperationer fås

$$(A \mid \mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 5 & 0 & -2 & -a-3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 5 & a+5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & -2a+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$$

Av den högra matrisen framgår att $(A \mid \mathbf{b})$ är lösbart om och endast om $a = -2$. Vi sätter in $a = -2$ i den högra matrisen. Efter ytterligare några radoperationer får vi

$$(A \mid \mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser att x_3, x_5 är de fria obekanta och att lösningarna till $(A \mid \mathbf{b})$, i fallet då $a = -2$, ges av

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Av detta följer också att den allmänna lösningen till $(A \mid \vec{0})$ är

$$\mathbf{x} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Uppgifter till lektion 3:

1. Lös, för alla värden på den reella konstanten a, ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & a \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & + & az & = & 4 \end{array}\right\}$$

Lösning. Vi skriver systemet som en totalmatris och gör radoperationer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 4 & a & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} - \boxed{1} \\ \boxed{3} - 2\boxed{1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & a-2 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & a & 4-2a \end{array}\right)$$

Om $a = 0$ så svarar den tredje raden mot den orimliga ekvationen $0 = 4$, vilket innebär att systemet saknar lösningar. Vi antar i fortsättningen att $a \neq 0$ och får:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & a-2 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & a & 4-2a \end{array}\right) \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2}(a) \\ \boxed{3} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & a(a-2) & a & a(2-a) \\ 0 & 0 & a & 4-2a \end{array}\right) \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} - \boxed{3} \\ \boxed{3} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & a(a-2) & 0 & (a-2)(2-a) \\ 0 & 0 & a & 4-2a \end{array}\right) \qquad (*)$$

Om vi sätter $a = 2$ i $(*)$ så får vi matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y & = & 2 \\ z & = & 0 \end{array} \right\}$$

Ekvationssystemet har alltså i det fallet oändligt många lösningar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2y \\ 0+y \\ 0+0y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I fortsättningen antar vi att $a \neq 2$ och får:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & a(a-2) & 0 & (a-2)(2-a) \\ 0 & 0 & a & 4-2a \end{array}\right) \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2}/(a-2) \\ \boxed{3} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & a & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & a & 4-2a \end{array}\right) \begin{array}{l} \boxed{1}(a) \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2a & 0 & a^2 \\ 0 & a & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & a & 4-2a \end{array}\right) \begin{array}{l} \boxed{1}-2\boxed{2} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & a^2+2a-4 \\ 0 & a & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & a & 4-2a \end{array}\right)$$

Om $0 \neq a \neq 2$ har systemet därför den entydiga lösningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a^2+2a-4 \\ 2-a \\ 4-2a \end{pmatrix}$$

$\square$

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

– Bestäm alla värden på den reella konstanten a för vilka matrisen A är inverterbar och bestäm, i sådana fall, A:s invers.

– Sätt $a = 4$ i ovanstående matris A och skriv sedan A som en produkt av högst sex elementära matriser.

Lösning. – En radoperation ger

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Av den tredje raden i den högra matrisen framgår att A inte är inverterbar då $a = 2$. Vi antar därför att $a \neq 2$. Efter ytterligare några radoperationer, där vi undviker division, får vi

$$(A \mid I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} a-2 & 0 & 0 & 2-a & a-1 & -1 \\ 0 & a-2 & 0 & a-2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Vi ser att A är inverterbar för alla $a \neq 2$ och

$$A^{-1} = \frac{1}{a-2} \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & -1 \\ a-2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

– Vi gör en radoperation i taget och får

$$A \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4 \sim A_5 \sim I$$

I varje steg gör vi samma radoperation på enhetsmatrisen och noterar de elementära matriser $E_1, \ldots, E_6$ som uppkommer:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} - \boxed{2} \end{array} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = E_1$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} - \boxed{3} \\ \boxed{3} \end{array} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3}(\frac{1}{2}) \end{array} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = E_3$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} - \boxed{3} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{array} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} - \boxed{1} \\ \boxed{3} \end{array} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_5$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{2} \\ \boxed{1} \\ \boxed{3} \end{array} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_6$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Av ovanstående följer att $E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = I$. Alltså har vi

$$
\begin{aligned}
A &= E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

Uppgifter till lektion 4:

1. Låt

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
$$

(a) Beräkna $\det(A)$.

(b) Beräkna kofaktormatrisen C, till A.

(c) Ange den adjungerade matrisen $\operatorname{adj}(A)$.

(d) Bestäm A^{-1}.

(e) Lös matrisekvationen $AXA^{-1} = B$, där

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}
$$

Lösning. Minorerna till matrisen A ges av

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, & M_{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2, & M_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \\
M_{21} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, & M_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6, & M_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \\
M_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, & M_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, & M_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1
\end{aligned}
$$

Kofaktormatrisen C fås genom att man tar matrisen med alla minorer och byter tecken på alla element M_{ij} sådana att $i + j$ är udda (schackbrädet). Om A är som ovan får vi

$$
C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -4 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}
$$

Utveckling efter första raden ger

$$
\begin{aligned}
\det A &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\
&= (1)(2) + (2)(-2) + (2)(2) = 2 - 4 + 4 \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Vi får sedan

$$\operatorname{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

och

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Genom multiplikation till vänster med A^{-1} och till höger med A får vi slutligen

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}AXA^{-1}A = A^{-1}BA \\ &= A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 4 & -4 \\ -13 & 3 & 20 \\ -17 & -6 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 104 & 8 & -96 \\ -130 & -2 & 136 \\ 87 & 2 & -92 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

2. Lös ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ x & x & x & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \\ 2x & -1 & x & 0 \end{vmatrix}$$

Lösning. Vi får successivt

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ x & x & x & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \\ 2x & -1 & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & x & x & 1 \\ -6 & 0 & 1 & 1 \\ x & -1 & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & x & x-1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 1 \\ x & -1 & x & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & x & x-1 \\ x & -1 & x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & x & -x-1 \\ x & -1 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -x-1 \\ x & x+2 \end{vmatrix} \\ &= 6x + 12 + x^2 + x = x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4) \end{aligned}$$

Ekvationen har därför rötterna $x = -3$ och $x = -4$. □

Uppgifter till lektion 5:

1. Punkterna $A = (0, 3, 4)$ och $B = (-2, 1, 6)$ är varandras spegelbilder i planet Π. Bestäm en ekvation för Π. Bestäm även avståndet från origo till Π och den punkt på Π som ligger närmast origo.

Lösning. Mittpunkten M på sträckan AB har koordinaterna

$$M = \left(\tfrac{0-2}{2}, \tfrac{3+1}{2}, \tfrac{4+6}{2}\right) = (-1, 2, 5).$$

M måste ligga på Π. Normalen $\mathbf{n}$, till Π, är parallell med $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, 2)^T$. Vi kan, till exempel, ta $\mathbf{n} = (1, 1, -1)^T$. En ekvation för Π ges därför av

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-5 \end{pmatrix} = (x+1) + (y-2) - (z-5) = x + y - z + 4.$$

Formeln för avståndet punkt-plan ger

$$\text{Avst}(O, \Pi) = \frac{|0 + 0 - 0 + 4|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Låt N vara punkten på Π som ligger närmast origo. Vektorn $\overrightarrow{ON}$ är då parallell med $\mathbf{n}$. Det finns därför ett tal t sådant att $\overrightarrow{ON} = t\mathbf{n}$, vilket betyder att $N = (t, t, -t)$. Eftersom N ligger på planet får vi

$$-4 = t + t + t \quad \Rightarrow \quad t = -\tfrac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad N = \left(-\tfrac{4}{3}, -\tfrac{4}{3}, -\tfrac{4}{3}\right).$$

$\square$

2. Låt $A = (0, 3, 4)$ och $B = (4, -1, 6)$. Linjen L går genom origo och är parallell med vektorn $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^T$. Bestäm alla punkter C på linjen L, sådana att triangeln ABC blir rätvinklig.

Lösning. Vi har $C = (t, t, t)$ för något $t \in \mathbb{R}$. Den räta vinkeln kan vara vid A, B eller C.

Rät vinkel vid A gäller om och endast om

$$0 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t-3 \\ t-4 \end{pmatrix} = 2(t+2) \quad \Rightarrow \quad t = -2, \quad C = (-2, -2, -2).$$

Rät vinkel vid B gäller om och endast om

$$0 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t-4 \\ t+1 \\ t-6 \end{pmatrix} = 2(t-16) \quad \Rightarrow \quad t = 16, \quad C = (16, 16, 16).$$

Rät vinkel vid C gäller om och endast om

$$0 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} t \\ t-3 \\ t-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t-4 \\ t+1 \\ t-6 \end{pmatrix} = 2(3t-7)(t-3)$$

$$\Rightarrow \quad t = \tfrac{7}{3}, \quad C = \left(\tfrac{7}{3}, \tfrac{7}{3}, \tfrac{7}{3}\right) \quad \text{eller} \quad t = 3, \quad C = (3, 3, 3).$$

$\square$

Uppgifter till lektion 6:

1. Låt L_1 vara linjen genom punkterna $(1,0,3)$ och $(2,4,0)$. Låt L_2 vara skärningslinjen mellan planen $x+2y-2z=4$ och $3x+4y=2$. Bestäm avståndet δ mellan linjerna L_1 och L_2. Bestäm en ekvation för planet Π som innehåller L_1 och är parallellt med L_2. Bestäm alla punkter $P \in L_1$, $Q \in L_2$ sådana att $\| \overrightarrow{PQ} \| = \delta$.

Lösning. En ekvation på vektorform för L_1 är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{v}_1 = \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 4t \\ 3-3t \end{pmatrix}$$

Kryssprodukten av normalerna för planen, vars skärning är L_2, ges av

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En riktningsvektor för L_2 är därför $\mathbf{v}_2 = (-4,3,1)^T$. Varje punkt $(2,-1,z)$ uppfyller ekvationen $3x+4y=2$. Sätter vi in koordinaterna i ekvationen $x+2y-2z=4$ får vi $-2z=4$. En punkt på L_2 är alltså $(2,-1,-2)$. En ekvation på vektorform för L_2 är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{v}_2 = \mathbf{g}(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4s \\ -1+3s \\ -2+s \end{pmatrix}$$

Vektorn mellan en godtycklig punkt på L_1 och en godtycklig punkt på L_2 ges av

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(s) = \begin{pmatrix} -1+t+4s \\ 1+4t-3s \\ 5-3t-s \end{pmatrix}$$

Minsta värdet δ på $\|\mathbf{w}\|$ fås då $\mathbf{w}$ är vinkelrät mot båda linjerna. Det ger oss ekvationerna

$$0 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} = -12 + 26t - 5s \quad \text{och} \quad 0 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w} = 12 + 5t - 26s$$

Ekvationssystemet har den unika lösningen $t = s = \frac{4}{7}$, vilket ger

$$\mathbf{w} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 19 \end{pmatrix} \qquad \delta = \|\mathbf{w}\| = \sqrt{\frac{93}{7}}$$

Punkterna $P \in L_1$, $Q \in L_2$ sådana att $\| \overrightarrow{PQ} \| = \delta$ ges av

$$P = (\tfrac{11}{7}, \tfrac{16}{7}, \tfrac{9}{7}) \quad \text{och} \quad Q = (-\tfrac{2}{7}, \tfrac{5}{7}, -\tfrac{10}{7})$$

En vektor som är vinkelrät mot båda linjerna är $\mathbf{n} = 7\mathbf{w} = (13,11,19)^T$. En ekvation för planet Π som innehåller L_1 och är parallellt med L_2 ges av

$$0 = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-3 \end{pmatrix} = 13x + 11y + 19z - 70.$$

$\square$

2. Låt $OABC$ vara tetraedern med O i origo och $A = (4, 0, 3)$, $B = (-2, 1, 1)$, $C = (0, 7, 2)$. Bestäm arean av sidoytan OAB. Bestäm längden h av höjden från C mot sidoytan OAB. Bestäm alla punkter N på sidoytan OAB sådana att $\parallel \overrightarrow{CN} \parallel = h$. Bestäm volymen av tetraedern $OABC$.

Lösning. Vi har

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Planet genom O, A, B har därför normalen $\mathbf{n} = (3, 10, -4)^T$ och en ekvation $3x + 10y - 4z = 0$. Matrisen för projektionen längs $\mathbf{n}$ ges av

$$Q = \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{n}} = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}(3\ 10\ -4) = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 9 & 30 & -12 \\ 30 & 100 & -40 \\ -12 & -40 & 16 \end{pmatrix}$$

Höjdvektorn $\overrightarrow{CN}$ är projektionen av $-\overrightarrow{OC}$ längs $\mathbf{n}$:

$$\overrightarrow{CN} = Q(-\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 9 & 30 & -12 \\ 30 & 100 & -40 \\ -12 & -40 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{62}{125}\begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Höjden ges av

$$h = \parallel \overrightarrow{CN} \parallel = \frac{62}{125}\sqrt{9 + 100 + 16} = \frac{62}{5\sqrt{5}}$$

Arean α av triangeln OAB är

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\parallel \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \parallel = \tfrac{1}{2}\sqrt{9 + 100 + 16} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

Volymen V av tetraedern ges därför av

$$V = \tfrac{1}{3}\alpha h = \frac{1}{3}\,\frac{5\sqrt{5}}{2}\,\frac{62}{5\sqrt{5}} = \frac{31}{3}$$

Slutligen ges höjdens fotpunkt N av

$$N = C + \overrightarrow{CN} = \left(-\frac{186}{125}, \frac{51}{25}, \frac{498}{125}\right)$$

$\square$

Uppgifter till lektion 7:

1. Låt W vara det linjära höljet av vektorerna $(-1, 3, 2, 2)^T$, $(1, 0, -1, -7)^T$, $(-5, 6, 7, 25)^T$, $(0, 1, 2, 5)^T$ och $(2, -1, 1, 1)^T$. Bestäm en bas i W bland dessa vektorer. Utvidga den funna basen till en bas $\underline{b}$ i $\mathbb{R}^4$, med hjälp av standardbasvektorer. Bestäm komponenterna i basen $\underline{b}$ för de fem givna vektorerna och de fyra standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^4$.

Lösning. Vi bildar matrisen A, med vektorerna som kolonner (se lektion 2) och gör radoperationer:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Av C framgår att

$$\underline{a} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

utgör en bas i W och av tredje- och femte kolonnen i C ser vi att

$$\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_4, \qquad \mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_4$$

Komponentvektorerna (koordinatvektorerna) för $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$ i basen $\underline{a}$ ges alltså av

$$(\mathbf{a}_1)_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\mathbf{a}_2)_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\mathbf{a}_3)_a = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\mathbf{a}_4)_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\mathbf{a}_5)_a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

För att få en bas i $\mathbb{R}^4$ ska vi komplettera $\underline{a}$ med en av standardbasvektorerna. Vi bildar därför matrisen $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ och gör radoperationer tills vi får en trappmatris:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 5 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Av den högra matrisen ser vi att alla fyra standardbasvektorerna duger som komplettering till $\underline{a}$, men att det uppenbarligen är enklast att välja $\mathbf{e}_4$. Då får vi basen

$$\underline{b} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{e}_4).$$

Komponentvektorerna för $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$, i basen $\underline{b}$ ges av

$$(\mathbf{a}_1)_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\mathbf{a}_2)_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\mathbf{a}_3)_b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\mathbf{a}_4)_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\mathbf{a}_5)_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{e}_1)_b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 3 \end{pmatrix} \ (\mathbf{e}_2)_b = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 3 \end{pmatrix} \ (\mathbf{e}_3)_b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ -4 \end{pmatrix} \ (\mathbf{e}_4)_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

2. Ett delrum L till $\mathbb{R}^5$ ges av $L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\mathbf{x} = \vec{0}\}$, där

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm en bas i L och utvidga den funna basen, med hjälp av standardbasvektorer, till en bas $\underline{c}$ i $\mathbb{R}^5$. Bestäm komponenterna i basen $\underline{c}$ för alla de fem standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^5$.

Lösning. Ekvationssystemen $A\mathbf{x} = \vec{0}$ och $C\mathbf{x} = \vec{0}$ (C som i uppgift 1) har samma lösningar, alltså

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_3 + x_5 \\ x_2 &= 3x_3 - x_5 \\ x_4 &= -2x_5, \end{aligned}$$

där x_3, x_5 kan väljas godtyckligt. Lösningsvektorn till $A\mathbf{x} = \vec{0}$ ges därför av

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3\mathbf{v}_3 + x_5\mathbf{v}_5.$$

Av detta följer att $\underline{v} = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5)$ är en bas i L. En lämplig bas i $\mathbb{R}^5$ är $\underline{c} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\mathbf{v}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{v}_5)$. Att $\underline{c}$ är en bas framgår direkt av att matrisen

$$U = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{v}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

är inverterbar, eftersom den är uppåt triangulär med determinant 1.

För att få komponentvektorerna för $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5$ löser vi matrisekvationen $(U \mid I_5)$. Vi får $(U \mid I_5) \sim (I_5 \mid V)$, där

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kolonnerna i V är koordinatvektorerna $(\mathbf{e}_1)_c, \ldots, (\mathbf{e}_5)_c$ för standardbasen i basen $\underline{c}$. $\square$

Uppgifter till lektion 8:

1. Bestäm matrisen för den linjära avbildningen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som geometriskt är en rotation 150° medurs. Beräkna $f(\mathbf{v})$ om (a) $\mathbf{v} = (1, 1)^T$, (b) $\mathbf{v} = (1, \sqrt{3})^T$.

Lösning. Eftersom 150° medurs är detsamma som $\alpha = -\frac{5}{6}\pi$ (mätt i radianer) får vi

$$
\begin{aligned}
[f] &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Det följer att

$$
f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \end{pmatrix}
$$

$$
f\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}
$$

□

2. Låt $\mathbf{n} = (-2, 1)^T$ och låt L vara den räta linjen genom origo som är vinkelrät mot $\mathbf{n}$. Bestäm matriserna P, Q, S för de linjära avbildningarna f, g, h, på $\mathbb{R}^2$, som geometriskt innebär den ortogonala projektionen på L, den ortogonala projektionen längs $\mathbf{n}$ respektive den ortogonala speglingen i L. Skriv vektorn $\mathbf{w} = (4, 3)^T$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med L och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot L. Bestäm även $f(\mathbf{w})$, $g(\mathbf{w})$ och $h(\mathbf{w})$.

Lösning. Vi börjar med g, den ortogonala projektionen längs $\mathbf{n}$: Matrisen Q, för $[g]$ ges av

$$
Q = \frac{\mathbf{n}\,\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{n}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}(-2,\ 1) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}
$$

För matrisen $P = [f]$ gäller då att

$$
P = I - Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}
$$

För $S = [h]$ har vi

$$
S = I - 2Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}
$$

I summan $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ gäller att $\mathbf{u}$ är projektionen av $\mathbf{w}$ på L och $\mathbf{v}$ är projektionen av $\mathbf{w}$ längs $\mathbf{n}$. Alltså har vi

$$
\mathbf{u} = P\mathbf{w} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+6 \\ 8+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = f(\mathbf{w})
$$

$$
\mathbf{v} = Q\mathbf{w} = \mathbf{w} - \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = g(\mathbf{w})
$$

Slutligen gäller att

$$
h(\mathbf{w}) = S\mathbf{w} = \mathbf{w} - 2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.
$$

□

Uppgifter till lektion 9:

1. Låt $\mathbf{n} = (-2, 1, 1)^T$ och låt Π vara planet genom origo som är vinkelrätt mot $\mathbf{n}$. Bestäm matriserna P, Q, S för de linjära avbildningarna f, g, h, på $\mathbb{R}^3$, som geometriskt innebär den ortogonala projektionen på Π, den ortogonala projektionen längs $\mathbf{n}$ respektive den ortogonala speglingen i Π. Skriv vektorn $\mathbf{w} = (3, 4, 5)^T$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med Π och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot Π. Bestäm även $f(\mathbf{w})$, $g(\mathbf{w})$ och $h(\mathbf{w})$.

Lösning. Här kan lösningen av föregående uppgift nästan kopieras ordagrant: Vi börjar med g, den ortogonala projektionen längs $\mathbf{n}$: Matrisen Q, för g, ges av

$$Q = \frac{\mathbf{n}\,\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{n}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(-2,\ 1,\ 1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

För matrisen $P = [f]$ gäller då att

$$P = I - Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

För $S = [h]$ har vi

$$S = I - 2Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

I summan $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ gäller att $\mathbf{u}$ är projektionen av $\mathbf{w}$ på Π och $\mathbf{v}$ är projektionen av $\mathbf{w}$ längs $\mathbf{n}$. Alltså har vi

$$\mathbf{u} = P\mathbf{w} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 27 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = f(\mathbf{w})$$

$$\mathbf{v} = Q\mathbf{w} = \mathbf{w} - \mathbf{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = g(\mathbf{w})$$

Slutligen gäller att

$$h(\mathbf{w}) = S\mathbf{w} = \mathbf{w} - 2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

□

2. För den linjära avbildningen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gäller att

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Bestäm f:s standardmatris.

Lösning. Vi söker $[f] = A$. Av ovanstående följer att $AB = C$ där

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

En metod är att beräkna B^{-1} och högermultiplicera båda leden i $AB = C$ med B^{-1}. Man får

$$A = ABB^{-1} = CB^{-1}$$

Alternativt kan vi transponera båda leden i $AB = C$. Det ger $B^T A^T = C^T$, vilket är en matrisekvation med A^T som obekant. Vi skriver ekvationen på matrisform och gör radoperationer:

$$(B^T \mid C^T) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 8 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) = (I \mid A^T)$$

Det betyder att

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

□

Uppgifter till lektion 10:

1. En flaggstång, representerad av vektorn $\mathbf{n} = (2,2,1)^T$, står (med svansen) i origo, vinkelrätt mot den plana marken. Solstrålarna faller in i riktningen av vektorn $\mathbf{v} = (1,1,-3)^T$. Beräkna längden av flaggstångens skugga. Är skuggan längre än flaggstången?

Lösning. Den plana marken svarar mot planet Π genom origo med normalen $\mathbf{n}$. Π har ekvationen $2x + 2y + z = 0$. Linjen L genom flaggstångens topp i $N = (2,2,1)$, parallell med $\mathbf{v}$, har vektorekvationen (parameterekvationen)

$$(x,y,z) = (2,2,1) + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (2+t, 2+t, 1-3t)$$

L skär Π i en punkt T med koordinaterna $(x,y,z) = (2+t, 2+t, 1-3t)$. Koordinaterna för T uppfyller Π:s ekvation, vilket ger

$$0 = 2(2+t) + 2(2+t) + (1-3t) = 9 + t \quad \Rightarrow \quad t = -9 \quad \Rightarrow \quad T = (-7,-7,28).$$

Skuggan av flaggstången ges av vektorn $\overrightarrow{OT} = (-7,-7,28)^T = 7(-1,-1,4)^T$ Eftersom

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{4+4+1} = 3 \quad \text{och} \quad \| \overrightarrow{OT} \| = 7\sqrt{1+1+16} = (3)(7)\sqrt{2}$$

ser vi att skuggan, med längden $21\sqrt{2}$, är $7\sqrt{2}$ gånger så lång som flaggstången. □

2. Låt $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^T$. Tre linjära operatorer f, g, h på $\mathbb{R}^3$ ges av

$$f(\mathbf{v}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}, \quad g(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}, \quad h(\mathbf{v}) = \mathbf{n} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Visa att för alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ är $f(\mathbf{v})$, $g(\mathbf{v})$ och $h(\mathbf{v})$ vinkelräta mot varandra. Bestäm standardmatrisen $[h]$ för h. Bestäm alla vektorer $\mathbf{v}$ för vilka $\|h(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$.

Lösning. Observera att $\mathbf{n}$ är en enhetsvektor, d.v.s $\|\mathbf{n}\| = 1$. Vi ser att f är projektionen längs $\mathbf{n}$, medan g är projektionen på planet Π, som går genom origo och har normalen $\mathbf{n}$. Alltså är $f(\mathbf{v})$ vinkelrät mot $g(\mathbf{v})$. Eftersom $\mathbf{n} \times \mathbf{v}$ är vinkelrät mot både $\mathbf{n}$ och $\mathbf{v}$ så är den vinkelrät mot alla linjärkombinationer av $\mathbf{n}$ och $\mathbf{v}$. Det medför att $h(\mathbf{v})$ är vinkelrät mot både $f(\mathbf{v})$ och $g(\mathbf{v})$. Matrisen för h fås ur kalkylen

$$\begin{aligned} h(\mathbf{v}) = \mathbf{n} \times \mathbf{v} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2v_2 - 2v_3 \\ 2v_1 - v_3 \\ 2v_1 + v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

För varje vektor $\mathbf{v}$ gäller alltså att $h(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, där

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det innebär att $A = [h]$.

Om θ är vinkeln mellan $\mathbf{n}$ och $\mathbf{v}$ gäller att

$$\|h(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{n} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{n}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta = \|\mathbf{v}\| \sin\theta$$

Av detta följer att $\|h(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ om och endast om $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot $\mathbf{n}$. $\square$