Svar till tentamen i linjär algebra och geometri I, 2012–06–04

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & = & 9 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & & & = & 11 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & + & 3\,x_4 & = & 13 \end{array}$$

Svar. Vi sätter upp systemet på matrisform och gör radoperationer tills vi får en trapp-matris:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Av den högra matrisen följer att lösningarna ges av

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - 3x_4 \\ x_2 &= 2 + 2x_4 \\ x_3 &= -4 - 3x_4 \end{aligned}$$

där x_4 kan väljas godtyckligt. Alltså har vi lösningarna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3x_4 \\ 2 + 2x_4 \\ -4 - 3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

2. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 1 \\ -1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 \\ 1 & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

inverterbar?

Svar. En uträkning ger $\det(A) = x^2(x^2 - 4)$. A är därför inverterbar om och endast om $x \neq 0, \pm 2$. $\square$

3. Bestäm varje matris X som uppfyller

$$A^T X\, A = B$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svar. Vi får

$$X = (A^{-1})^T B\, A^{-1}$$

A^{-1} beräknas genom $(A \mid I) \sim (I \mid A^{-1})$. $\square$

4. Låt $A = (1,2)$, $B = (4,1)$, $C = (5,3)$ och $D = (3,5)$ vara fyra punkter i planet. Bestäm arean av (den konvexa) fyrhörningen med hörn i dessa punkter.

Svar. Fyrhörningen kan delas upp i trianglarna ABD och BCD Vi har $\overrightarrow{AB}= (3,-1)^T$, $\overrightarrow{AD}= (2,3)^T$, $\overrightarrow{BC}= (1,2)^T$, $\overrightarrow{BD}= (2,3)^T$. Eftersom

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \quad \text{och} \quad \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

har vi

$$\text{(fyrhörn. area)} = \frac{11}{2} + \frac{6}{2} = \frac{17}{2}$$

$\square$

5. Låt $\mathbf{u} = (1,2,0)^T$, $\mathbf{v} = (-3,4,1)^T$ och $\mathbf{w} = (1,0,1)^T$ vara tre vektorer i rymden. Endast en av följande operationer är väldefinierad:

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \times \mathbf{w}, \qquad (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}, \qquad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}.$$

Bestäm den operation som är korrekt och beräkna uttrycket.

Svar. Den tredje operationen är väldefinierad och

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

6. Låt Π vara planet som innehåller punkterna $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,1)$ och $C = (-1,4,-1)$. Bestäm avståndet från punkten $D = (2,1,0)$ till planet Π.

Svar. Π har en standardekvation $x - z = 0$. Avståndet δ från $D = (2,1,0)$ till Π ges därför av

$$\delta = \frac{|2-0|}{\sqrt{1+0+1}} = \sqrt{2}.$$

$\square$

7. Bestäm standardmatrisen P för den ortogonala projektionen på planet $x + 3y - z = 0$.

Svar. Planets normal är $\mathbf{n} = (1, 3, -1)^T$. Standardmatrisen Q för den ortogonala projektionen längs $\mathbf{n}$ ges därför av

$$Q = \frac{\mathbf{n}\,\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{n}} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}(1, 3, -1) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Alltså har vi

$$P = I - Q = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} + \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -9 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

□

8. Bestäm en parameterekvation för linjen L som utgör skärningen mellan planen $x = 2y$ och $x + y + z = 0$.

Svar. Planen har normalerna $\mathbf{n}_1 = (1, -2, 0)^T$ respektive $\mathbf{n}_2 = (1, 1, 1)^T$. En vektor parallell med L är därför

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Båda planen går genom origo så $(0, 0, 0) \in L$. En parameterekvation (snarare vektorekvation) för L är därför

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-2t, -t, 3t).$$

□