Svar till tentamen i linjär algebra och geometri I, 2012–08–22

1. Avgör om vektorn $\mathbf{v} = (1,3,5)^T$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svar. Ekvationssystemet med totalmatrisen $(\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2\, \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{v})$ har den entydiga lösningen $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Det betyder att $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$ (vilket är lätt att kontrollera). $\square$

2. Låt $A = (1,1)$, $B = (3,4)$ och $C = (-2,3)$ vara tre punkter i planet. Bestäm arean av triangeln med hörn i dessa tre punkter.

Svar. Vi har $\overrightarrow{AB} = (2,3)^T$ och $\overrightarrow{AC} = (-3,2)^T$. Eftersom

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13$$

har parallellogrammen som spänns upp av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ arean 13. Triangeln ABC har därför arean $13/2$. $\square$

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Finn elementarmatriser E_1, E_2, E_3 sådana att $E_3E_2E_1A = I$.

(b) Skriv A som en produkt av elementarmatriser.

Svar. Genom att göra en radoperation i taget får vi

$$A \sim A_1 \sim A_2 \sim I$$

I varje steg gör vi samma radoperation på enhetsmatrisen och noterar de elementära matriser E_1, E_2, E_3 som uppkommer:

$$\begin{array}{lll}
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} - 3\boxed{1} \end{array} & : & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = E_1 \\
A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} + \boxed{2} \\ \boxed{2} \end{array} & : & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \\
A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2}(-2^{-1}) \end{array} & : & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = E_3 \\
I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & &
\end{array}$$

Det följer att $E_3E_2E_1A = I$. Av detta följer i sin tur att $A^{-1} = E_3E_2E_1$ och

$$A = (E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\square$

4. Låt $A = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix}$, där $x \in \mathbb{R}$.

(a) Ange $\operatorname{adj}(A)$.
(b) Beräkna $\det(A)$.
(c) Avgör för vilka x som A är inverterbar och bestäm A^{-1} i sådana fall.

Svar. (a) Vi har $\operatorname{adj}(A) = C^T$, där $C = ((-1)^{i+j} M_{ij})$, där M_{ij} är minorerna till A. Vi får

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 1-x & 1+x \\ 1+x & 1+x^2 & 1-x \\ 1-x & 1+x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

(b) Vi vet att $A \operatorname{adj}(A) = \det(A)\, I_3$. Av detta följer

$$\det(A) = x(1+x^2) + (1+x) - (1-x) = 3x + x^3 = x(3+x^2).$$

(c) Då $\det(A) = 0$ bara för $x = 0$ följer att A är inverterbar för alla $x \neq 0$. För dessa x ges inversen av

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{3x+x^3} \begin{pmatrix} 1+x^2 & 1-x & 1+x \\ 1+x & 1+x^2 & 1-x \\ 1-x & 1+x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

$\square$

5. Låt L vara linjen som ges av $(x,y,z) = (-1+t, 2, 2t)$. Vilken punkt P på L är närmast origo? Bestäm även avståndet δ från P till origo.

Svar. L har en riktningsvektor $\mathbf{v} = (1,0,2)^T$. Eftersom P ligger på L finns ett tal p så att $P = (-1+p, 2, 2p)$. Att P ligger närmast origo är ekvivalent med att

$$0 = \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{OP} = (-1+p) + 0 + 2(2p) = 5p - 1 \Longrightarrow p = \frac{1}{5}$$

Alltså har vi $P = (-\frac{4}{5}, 2, \frac{4}{5})$ och avståndet till origo ges av

$$\delta = \| \overrightarrow{OP} \| = \sqrt{\frac{16}{25} + 4 + \frac{16}{25}} = \tfrac{2}{5}\sqrt{33}.$$

$\square$

6. Linjerna L_1 och L_2 ges av

$$L_1 : (x,y,z) = (0, -t, t) \qquad \text{och} \qquad L_2 : (x,y,z) = (-1+2t, t, 1+3t).$$

Bestäm avståndet δ mellan L_1 och L_2.

Svar. L_1, L_2 har riktningsvektorer $\mathbf{v}_1 = (0,-1,1)^T$ respektive $\mathbf{v}_2 = (2,1,3)^T$. Vektorn $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (-4,2,2)^T = 2(-2,1,1)^T$ är därför vinkelrät mot båda linjerna. En punkt på L_1 är $P_1 = (0,0,0)$ och en punkt på L_2 är $P_2 = (-1,0,1)$. Planet Π genom origo med normalvektorn $\mathbf{n} = (-2,1,1)^T$ innehåller därför L_1 och är parallellt med L_2. Avståndet mellan L_2 och Π är lika med δ. Det betyder att δ är lika med avståndet mellan Π och P_2. Eftersom Π har en standardekvation $-2x+y+z=0$ har vi

$$\delta = \frac{|(-2)(-1)+(0)+(1)|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

$\square$

7. Låt K vara planet $x+y+z=2$ och låt L vara linjen $(x,y,z) = (-2+t, 1, -3+t)$. Bestäm punkten P där K skär L. Bestäm också vinkeln mellan K och L. Vinkeln mellan ett plan och en linje definieras som den minsta vinkeln mellan två vektorer, där den ena ligger i linjen och den andra i planet.

Svar. Punkten $P = (x,y,z) = (-2+t, 1, -3+t)$ där K skär L ges av

$$2 = (-2+t)+(1)+(-3+t) = 2t-4 \quad\Longleftrightarrow\quad 2t=6 \quad\Longleftrightarrow t=3.$$

Alltså har vi $P = (1,1,0)$. Planets normal är $\mathbf{n} = (1,1,1)^T$. En vektor längs L är $\mathbf{v} = (1,0,1)^T$. Vinkeln θ mellan $\mathbf{n}$ och $\mathbf{v}$ ges av

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{n}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad\Longrightarrow\quad \theta = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Vinkeln mellan L och Π är $\pi/2-\theta$. $\square$

8. Den linjära avbildningen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uppfyller

$$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \quad f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2, \quad \text{och} \quad f(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_3,$$

där $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är vektorerna i första problemet och

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestäm f:s standardmatris och avgör om f är inverterbar.

Svar. Vi söker $[f] = A$. Av ovanstående följer att $AB = C$ där

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En metod är att beräkna B^{-1} och högermultiplicera båda leden i $AB = C$ med B^{-1}. Man får

$$A = ABB^{-1} = CB^{-1}$$

Alternativt kan vi transponera båda leden i $AB = C$. Det ger $B^T A^T = C^T$, vilket är en matrisekvation med A^T som obekant. Vi skriver ekvationen på matrisform och gör radoperationer:

$$(B^T \mid C^T) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) = (I \mid A^T)$$

Det betyder att

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 8 & -10 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$\square$