UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Styf

Linjär algebra och geometri I

Problemen i lösta problem

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & ay & + & 3z & = & 2 \\ ax & + & y & + & (a+1)z & = & 1 \\ 2x & + & (a+2)y & + & (2a+2)z & = & 4 \end{cases}$$

för alla värden på den reella konstanten a.

2. Betrakta följande fem vektorer i $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{a}_1 = (2,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{a}_3 = (3,1,2,2)$, $\mathbf{a}_4 = (1,1,1,0)$, $\mathbf{a}_5 = (1,0,-2,1)$.

(i) Avgör, för $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$ om $\mathbf{a}_k$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_j$, $j < k$, och bestäm i så fall en sådan linjärkombination. Låt K vara mängden av alla k sådana att $\mathbf{a}_k$ INTE kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_j$, $j < k$. Bestäm K.

(ii) Visa att varje linjärkombination av $\mathbf{a}_1,\ \dots,\ \mathbf{a}_5$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_k,\ k \in K$.

(iii) För vilka värden på den reella konstanten a kan vektorn $v = (3+a, 3, 3+a, 2+2a)$ skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{a}_1,\ \dots,\ \mathbf{a}_5$? Skriv i sådana fall v som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_k,\ k \in K$.

3. Betrakta följande fem vektorer i $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{a}_1 = (1,-1,0,1)$, $\mathbf{a}_2 = (2,1,1,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (0,3,1,-3)$, $\mathbf{a}_4 = (1,2,3,1)$, $\mathbf{a}_5 = (1,-1,2,4)$.

(i) Avgör, för $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$ om $\mathbf{a}_k$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_j$, $j < k$, och bestäm i så fall en sådan linjärkombination. Låt K vara mängden av alla k sådana att $\mathbf{a}_k$ INTE kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_j$, $j < k$. Bestäm K.

(ii) Visa att varje linjärkombination av $\mathbf{a}_1,\ \dots,\ \mathbf{a}_5$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_k,\ k \in K$.

(iii) För vilka värden på den reella konstanten a kan vektorn $\mathbf{v} = (4, a+3, 5, a-4)$ skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{a}_1,\ \dots,\ \mathbf{a}_5$? Skriv i sådana fall v som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_k,\ k \in K$.

4. *För vilka värden på den reella konstanten a är matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

inverterbar? Bestäm inversen för dessa a.

5. Lös matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Skriv matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

som en produkt av elementära matriser och en reducerad trappmatris.

7. Finn a_1, a_2, a_3, ej alla 0, sådana att $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = 0$ under förutsättning att systemet

$$\begin{cases} x + 2y - z = b_1 \\ 2x - y + 2z = b_2 \\ x + 7y - 5z = b_3 \end{cases}$$

är lösbart.

8. a) Finn alla matriser som kommuterar med matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Finn alla matriser som kommuterar med matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Kunde man förutse att resultaten i a) och b) blir samma utan att lösa dessa uppgifter? Bevisa ditt påstående.

9. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & x \\ -1 & 2 & x & 3 \\ 3 & x & 2 & -1 \\ x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Visa att

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & & & & . & . \\ . & . & . & & & & . & . \\ . & . & . & & & & . & . \\ -1 & -1 & -1 & . & . & . & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & . & . & . & -1 & x \end{vmatrix} = \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{2}$$

där ovanstående determinant är av ordning n.

11. Låt Π vara planet med ekvationen $x + 2y - 2z = 5$. Skriv vektorn $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ som en summa $\vec{u} = \vec{p} + \vec{q}$, där $\vec{p}$ är paralell med Π och $\vec{q}$ är vinkelrät mot Π.

12. Då punkterna $A_1(2, -1, 1)$, $B_1(3, 1, 1)$, $C_1(3, 0, 0)$ projiceras ortogonalt på planet Π i föregående uppgift får man punkterna A, B respektive C. Bestäm arean av triangeln ABC.

13. Bestäm en ekvation för planet genom punkterna $P_0(-2, 3, 1)$, $P_1(1, -1, 1)$, $P_2(-1, 4, 2)$. Visa att planet inte går genom origo och bestäm avståndet från punkten $P_3(-7, 2, 4)$ till planet.