

Genomgå på sammandragningarna.

Här sammanfattar vi det som går igenom under sammandragningarna. Det innebär dels att en hel del som tas upp utelämnas, men också att sådant som **borde** ha tas upp (om tiden hade räckt eller formen varit bättre) tillkommer.

Sammandragning 1: Denna kurs handlar om linjära ekvationssystem, matriser, determinanter, vektorer (med skalärprodukt och kryssprodukt), linjer och plan samt linjära operatorer.

Dagens ämnen är linjära ekvationssystem och matriser. I detta dokument tar vi i stort sett bara upp belysande exempel. För den allmänna teorin hänvisar vi till läsanvisningarna och läroboken.

- Matrisräkning fungerar ungefär som räkning med tal (se TH 1.4.1) med följande undantag: $AB = O$ (O betecknar alltid en nollmatris) kan gälla även i fall där $A \neq O$ och $B \neq O$. I allmänhet gäller att $AB \neq BA$. Exempelvis:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

- En kolonnmatris kallas ofta för en **kolonnvektor** (eller helt enkelt **vektor**). På samma sätt brukar en radmatris kallas för en **radvektor** (eller helt enkelt **vektor**).

Ett linjärt ekvationssystem kan skrivas $Ax = b$, där A är koefficientmatrisen, x är kolonnvektorn med de obekanta och b är kolonnvektorn innehållande högerledet. Exempelvis kan ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ ax + y + (a+1)z = 1 \\ 2x + (a+2)y + (2a+2)z = 4 \end{cases}$$

skrivs som

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ a & 1 & a+1 \\ 2 & a+2 & 2a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man kan även skriva ekvationssystemet som

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b},$$

där $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ är kolonnerna i koefficientmatrisen, $x_1, x_2, \dots, x_n$ är de obekanta och $\mathbf{b}$ är högerledet. Skrivet på denna form blir, till exempel, ovanstående ekvationssystem

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ a+2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a+1 \\ 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Av denna form framgår det att ekvationssystemet är lösbart om och endast om $\mathbf{b}$ kan skrivas som en **linjärkombination** av kolonnerna i A .

- Vid lösandet av ett ekvationssystem skrivs det först på matrisformen $(A | \mathbf{b})$. Med elementära radoperationer transformeras därefter matrisen $(A | \mathbf{b})$ till en (helst reducerad) **trappmatris** $(C | \mathbf{h})$.

Matriserna $(A | \mathbf{b})$ och $(C | \mathbf{h})$ är **radekvivalenta**, vilket skrivs som $(A | \mathbf{b}) \sim (C | \mathbf{h})$ och innebär att den ena matrisen kan transformeras till den andra matrisen genom ett antal radoperationer.

En fundamental sats är här att $(A | \mathbf{b}) \sim (C | \mathbf{h})$ om och endast om ekvationssystemen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $C\mathbf{x} = \mathbf{h}$ har samma lösningar. Speciellt gäller att $A \sim C$ om och endast om de homogena ekvationssystemen $A\mathbf{x} = \vec{0}$ och $C\mathbf{x} = \vec{0}$ har samma lösningar.

Av trappmatrisen $(C | \mathbf{h})$ kan du utläsa om systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart och, i så fall, vilka av de obekanta (variables som de kallas i läroboken) som är **fria** (alltså som du kan ge godtyckliga värden) respektive **bundna** (alltså vars värden är helt bestämda av värdena på de fria obekanta). Lösningen kan skrivas som $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_k\mathbf{v}_k$, där $t_1, t_2, \dots, t_k$ är värdena på de fria obekanta (som ju kan väljas godtyckligt). Här gäller att $\mathbf{x}_p$ (som är det $\mathbf{x}$ som erhålls då man väljer $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$) är en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, medan $\mathbf{x}_h = t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_k\mathbf{v}_k$ är den allmänna lösningen till det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$.

- **Exempel.** Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ ax + y + (a+1)z = 1 \\ 2x + (a+2)y + (2a+2)z = 4 \end{cases} \quad (\text{IH})$$

för alla värden på den reella konstanten a .

Lösning. (Se lösta problem 1. Vi hoppar över en del detaljer här.) På matrisform blir systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ a & 1 & a+1 & 1 \\ 2 & a+2 & 2a+2 & 4 \end{array} \right)$$

Genom några radoperationer transformeras detta till

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & a & 2a-2 & 2 \end{array} \right). \quad (*)$$

Om $a = 1$ så blir (*)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Av det högra systemet framgår att då $a = 1$ har (det ursprungliga) ekvationssystemet den entydiga lösningen $(x, y, z) = (-3, 2, 1)$.

Om $a \neq 1$ kan den tredje raden i (*) divideras med $1 - a$, varvid vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2a-2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{array} \right) \quad (\#)$$

I (#) ser vi att då $a \neq 2$ kan vi dividera den fjärde raden med $2 - a$ varvid vi erhåller $(0 \ 0 \ 0 \mid 1)$. Denna rad svarar mot den orimliga ekvationen $0 = 1$. Alltså saknar systemet lösningar då $a \notin \{1, 2\}$.

Om $a = 2$ blir den högra matrisen i (#)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (C \mid \mathbf{h}). \quad (\heartsuit)$$

$(C \mid \mathbf{h})$ är en reducerad trappmatris. Första- och andra kolonnen är pivotkolonner, vilket betyder att x, y är bundna obekanta. Den tredje kolonnen är ej någon pivotkolonn, vilket innebär att z är en fri obekant. Den första raden i ($\heartsuit$) svarar mot ekvationen $x + z = 0$. Den andra raden i ($\heartsuit$) svarar mot ekvationen $y + z = 1$. Sätter vi $z = t$ får vi därför $x = -t$ och $y = 1 - t$, vilket ger oss lösningarna $(x, y, z) = (-t, 1 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Skriver vi denna lösning på kolonnform, vilket är bäst, så får vi

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 - t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{r}_p + t \mathbf{v}.$$

Här gäller att $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p$ är en lösning till (IH), medan $\mathbf{r} = t \mathbf{v}$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena system (systemet med samma koefficientmatris och högerledet $\vec{0}$).

Svar. Då $a \notin \{1, 2\}$ saknar systemet lösningar. Då $a = 1$ har systemet den entydiga lösningen $(x, y, z) = (-3, 2, 1)$. Då $a = 2$ har systemet ett oändligt antal lösningar, vilka ges av $(x, y, z) = (-t, 1 - t, t) = (0, 1, 0) - t(1, 1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$. $\square$

• **Exempel.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 & 3 & 23 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 10 & -2 & -12 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & -5 & 1 & 11 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 7 & 17 & 1 & -5 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

Bestäm den unika reducerade trappmatrisen C , som är radekvivalent med A . Lös det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$. Använd lösningen för att bestämma sambanden mellan kolonnerna i A .

Lösning. Genom att göra en följd radoperationer, som vi hoppar över men som du bör göra, får vi

$$A \sim C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ekvationssystemet $C\mathbf{x} = \vec{0}$, som har samma lösningar som $A\mathbf{x} = \vec{0}$, är alltså

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 3x_4 + x_6 + 4x_8 = 0 \\ x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_6 + 3x_8 = 0 \\ x_5 + 6x_6 + 2x_8 = 0 \\ x_7 + x_8 = 0 \end{cases}$$

där vi underlåtit att skriva upp två triviala ekvationer (av typ $0 = 0$). Här ser vi att de obekanta x_1, x_2, x_5 och x_7 (de bundna obekanta) kan uttryckas i de obekanta x_3, x_4, x_6 och x_8 (de fria obekanta) enligt

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 - 3x_4 - x_6 - 4x_8 \\ x_2 &= -x_3 - 4x_4 + 2x_6 - 3x_8 \\ x_5 &= -6x_6 - 2x_8 \\ x_7 &= -x_8 \end{aligned}$$

Lösningarna till det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ kan därför skrivas

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2x_3 - 3x_4 - x_6 - 4x_8 \\ -x_3 - 4x_4 + 2x_6 - 3x_8 \\ 1x_3 + 0x_4 + 0x_6 + 0x_8 \\ 0x_3 + x_4 + 0x_6 + 0x_8 \\ 0x_3 + 0x_4 - 6x_6 - 2x_8 \\ 0x_3 + 0x_4 + x_6 + 0x_8 \\ 0x_3 + 0x_4 + 0x_6 - x_8 \\ 0x_3 + 0x_4 + 0x_6 + x_8 \end{pmatrix} = \\ &= x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

där x_3, x_4, x_6, x_8 kan väljas fritt (det är därför de kallas för fria).

Vi gör nu om detta, fast på ett lite annorlunda sätt. Kolonnerna i den reducerade trappmatrisen C är

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{c}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{c}_3 &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{c}_4 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{c}_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{c}_6 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{c}_7 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{c}_8 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ekvationssystemen $A\mathbf{x} = \vec{0}$ och $C\mathbf{x} = \vec{0}$ kan skrivas som

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 + x_5\mathbf{a}_5 + x_6\mathbf{a}_6 + x_7\mathbf{a}_7 + x_8\mathbf{a}_8 = \vec{0}. \quad (\#)$$

respektive

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 + x_4\mathbf{c}_4 + x_5\mathbf{c}_5 + x_6\mathbf{c}_6 + x_7\mathbf{c}_7 + x_8\mathbf{c}_8 = \vec{0}. \quad (*)$$

Pivotkolonnerna i C är de som har en etta på en plats och nollor på övriga platser. Alltså $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_5$ och $\mathbf{c}_7$. De bundna obekanta i ekvationssystemet $C\mathbf{x} = \vec{0}$ är därför x_1 , x_2 , x_5 och x_7 . Övriga kolonner, alltså $\mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_4$, $\mathbf{c}_6$ och $\mathbf{c}_8$, är inga pivotkolonner. De fria obekanta i ekvationssystemet $C\mathbf{x} = \vec{0}$ är därför x_3 , x_4 , x_6 och x_8 . För kolonnerna $\mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_4$, $\mathbf{c}_6$ och $\mathbf{c}_8$ gäller att var och en av dem kan skrivas som en linjärkombination av de pivotkolonner som ligger **till vänster** om kolonnen i fråga. Närmare bestämt gäller att

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_3 &= -2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_4 &= 3\mathbf{c}_1 + 4\mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_6 &= \mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2 + 6\mathbf{c}_5 \\ \mathbf{c}_8 &= 4\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_5 + \mathbf{c}_7 \end{aligned}$$

Kontrollera detta! Dessa likheter kan skrivas som

$$\begin{aligned} \vec{0} &= (-2)\mathbf{c}_1 + 1\mathbf{c}_2 + (-1)\mathbf{c}_3 + 0\mathbf{c}_4 + 0\mathbf{c}_5 + 0\mathbf{c}_6 + 0\mathbf{c}_7 + 0\mathbf{c}_8 \\ \vec{0} &= 3\mathbf{c}_1 + 4\mathbf{c}_2 + 0\mathbf{c}_3 + (-1)\mathbf{c}_4 + 0\mathbf{c}_5 + 0\mathbf{c}_6 + 0\mathbf{c}_7 + 0\mathbf{c}_8 \\ \vec{0} &= 1\mathbf{c}_1 + (-2)\mathbf{c}_2 + 0\mathbf{c}_3 + 0\mathbf{c}_4 + 6\mathbf{c}_5 + (-1)\mathbf{c}_6 + 0\mathbf{c}_7 + 0\mathbf{c}_8 \\ \vec{0} &= 4\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 + 0\mathbf{c}_3 + 0\mathbf{c}_4 + 2\mathbf{c}_5 + 0\mathbf{c}_6 + 1\mathbf{c}_7 + (-1)\mathbf{c}_8 \end{aligned}$$

Alltså är kolonnvektorererna

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

lösningar till $Cx = \vec{0}$. Som vi har sett är de då också lösningar till $Ax = \vec{0}$, vilket betyder att vi har likheterna

$$\begin{aligned}\vec{0} &= (-2)\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_2 + (-1)\mathbf{a}_3 + 0\mathbf{a}_4 + 0\mathbf{a}_5 + 0\mathbf{a}_6 + 0\mathbf{a}_7 + 0\mathbf{a}_8 \\ \vec{0} &= 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 + (-1)\mathbf{a}_4 + 0\mathbf{a}_5 + 0\mathbf{a}_6 + 0\mathbf{a}_7 + 0\mathbf{a}_8 \\ \vec{0} &= 1\mathbf{a}_1 + (-2)\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 + 0\mathbf{a}_4 + 6\mathbf{a}_5 + (-1)\mathbf{a}_6 + 0\mathbf{a}_7 + 0\mathbf{a}_8 \\ \vec{0} &= 4\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 + 0\mathbf{a}_4 + 2\mathbf{a}_5 + 0\mathbf{a}_6 + 1\mathbf{a}_7 + (-1)\mathbf{a}_8\end{aligned}$$

vilka kan omskrivas som

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_3 &= -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 &= 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_6 &= \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 6\mathbf{a}_5 \\ \mathbf{a}_8 &= 4\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_7\end{aligned}$$

Det råder alltså exakt samma samband mellan kolonnerna i A som mellan kolonnerna i C , vilket du bör kontrollera! Av den anledningen sägs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$ och $\mathbf{a}_7$ vara pivotkolonnerna i matrisen A . Övriga kolonner, alltså $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$ och $\mathbf{a}_8$, kan skrivas som linjärkombinationer av pivotkolonnerna. Eftersom pivotkolonnerna själva givetvis (hur då?) kan skrivas som linjärkombinationer av pivotkolonnerna kan alltså varje kolonn i matrisen A uttryckas som en linjärkombination av pivotkolonnerna i A .

Med ledning av ovanstående kan vi definiera pivotkolonnerna i en godtycklig matris A som de kolonner i A som **inte** kan skrivas som en linjärkombination av kolonnerna i A , som ligger till vänster om kolonnen i fråga.

Genom att resonera som vi gjort i detta exempel är det enkelt att bevisa den viktiga satsen att varje matris är radekvivalent med en **unik** reducerad trappmatris. $\square$

- På samma sätt som ovan kan man även lösa **matrisekvationer**. En matrisekvation har utseendet $AX = B$, där A är en given $m \times n$ -matris (koefficientmatrisen), B är en given $m \times p$ -matris (högerledet) och X är en obekant $n \times p$ -matris. Lösningen går till så att man först bildar totalmatrisen $(A \mid B)$. På denna görs sedan en följd radoperationer tills man får en (helst reducerad) trappmatris $(C \mid H)$. Matrisekvationen är lösbar om och endast om matrisen $(C \mid H)$ **inte** innehåller en rad med utseendet $(0 \cdots 0 \mid h_1 \cdots h_p)$, där minst ett av talen $h_1, \dots, h_p$ är skilt från noll. Alternativt kan detta uttryckas som att matrisekvationen är lösbar om och endast om **alla** pivotkolonnerna i $(C \mid H)$ ligger i C (ingen pivotkolonn i högerledet alltså).

Låt $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ vara kolonnerna i den obekanta matrisen X ($X = (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_p)$ alltså) och låt $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$ vara kolonnerna i högerledsmatrisen B ($B = (\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_p)$ alltså). Matrisekvationen $AX = B$ är då lösbar om och endast om alla ekvationssystemen $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p$, är lösbara (kolonnerna i X utgörs av lösningsvektorerna till dessa system).

Antag att $AX = B$ och $AX_s = B$. Vi har då att $A(X - X_s) = B - B = O$. Matrisen $X_h = X - X_s$ är alltså en lösning till den homogena matrisekvationen $AX = O$. Omvänt gäller att om X_h är en lösning till $AX = O$ och X_s är en lösning till $AX = B$ så är $X = X_s + X_h$ en lösning till $AX = B$. Det betyder att om X_s är en lösning till $AX = B$ och X_h är den allmänna lösningen till $AX = O$ så ges den allmänna lösningen (d.v.s samtliga lösningar) till $AX = B$ som $X = X_s + X_h$.

• **Exempel.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -18 & -17 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 20 & -1 \\ 1 & -3 & -5 & -9 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 25 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 51 & 2 & 4 \\ -16 & 2 & 9 \\ 25 & 5 & 0 \\ 10 & 1 & -3 \\ -11 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

Lös matrisekvationerna $AX = B$ och $AX = O$. Analysera sambanden mellan lösningarna.

Lösning. Vi har

$$(A | B) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 5 & -8 & -18 & -17 & 5 & 51 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 & -1 & -16 & 2 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & -9 & 3 & 25 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & 1 & 10 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 & 25 & -1 & -11 & -2 & 16 \end{array} \right)$$

Via ett antal radoperationer (överhoppas!) får vi

$$(A | B) \sim (C | H) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

För den homogena matrisekvationen får vi på samma sätt

$$(A | O) \sim (C | O) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

I båda fallen är samtliga pivotkolonner ($\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ och $\mathbf{c}_5$) i vänsterledet så matrisekvationerna är lösbara. Observera för övrigt att en homogen matrisekvation $AX = O$ alltid är lösbar, ty $X = O$ är ju en lösning. Den obekanta matrisen har tre kolonner; $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. Matrisekvationen $AX = B$ är ekvivalent med de tre ekvationssystemen $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$, $A\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_3$, där $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ är kolonnerna i B .

Låt oss titta närmare på ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$), vilket har samma lösningar som $C\mathbf{x} = \mathbf{h}_1$, där $\mathbf{h}_1$ är första kolonnen i H : De bundna obekanta är x_1, x_2, x_5 , medan x_3 och x_4 är fria. Väljer vi $x_3 = x_4 = 0$ så fås (se $(C | H)$) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ och $x_5 = 6$. En lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ är därför $\mathbf{x}_s = (1, -2, 0, 0, 6)$. Motsvarande homogena system är $A\mathbf{x} = \vec{0}$, vilket har samma lösningar som $C\mathbf{x} = \vec{0}$. Sätter vi $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$ så får vi

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 - 3x_4 = 2t_1 - 3t_2 \\ x_2 &= -x_3 - 4x_4 = -t_1 - 4t_2 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till det homogena systemet är därför

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_h &= \begin{pmatrix} 2t_1 - 3t_2 \\ -t_1 - 4t_2 \\ t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 \\ &= \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Av detta följer att den allmänna lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ ges av

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_h = \mathbf{x}_s + t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Första kolonnen i den allmänna lösningen till matrisekvationen $AX = B$ har alltså detta utseende. Genom att göra motsvarande för andra- och tredje kolonnen i X kan vi (detaljerna lämnas åt dig som läser detta) dra slutsatsen att matrisekvationen $AX = B$ har den allmänna lösningen

$$X = X_s + X_h = X_s + (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{pmatrix},$$

där $t = (t_{ik})$ är en godtycklig 2×3 -matris. För skojs skull kontrollerar vi att $X = X_s + X_h$ verkligen är en lösning till ekvationen $AX = B$. Vi har

$$\begin{aligned}AX &= AX_s + AX_h = B + A(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2)t \\ &= B + (A\mathbf{v}_1 \ A\mathbf{v}_2)t \\ &= B + (\vec{0} \ \vec{0})t = B.\end{aligned}$$

□

- Om A är en $m \times n$ -matris, där $m < n$, så måste ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ ha oändligt många lösningar. Anledningen är att antalet pivotkolonner är högst m så det måste finnas fria obekanta (minst $n - m$ stycken). Om A är en $m \times n$ -matris och ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ **bara** har lösningen $\mathbf{x} = \vec{0}$ så måste alltså $m \geq n$.
- Om A är en $m \times n$ -matris och $A \sim C$ där C är en trappmatris med r nollskilda rader sägs A ha **rangen** r . Eftersom antalet nollskilda rader i C är lika med antalet pivotkolonner så följer att rangen är **högst** lika med det **minsta** av talen m och n . En $m \times n$ -matris med rang lika med det minsta av talen m och n sägs ha **full** rang (större rang kan den inte ha). En

$m \times n$ -matris som innehåller en nollrad måste ha rang mindre än m . En $m \times n$ -matris som innehåller en nollkolonn måste ha rang mindre än n . En $n \times n$ -matris (kvadratisk matris) har full rang om och endast om den är radekvivalent med I_n .

Enhetsmatriserna $I = I_m$ är ju reducerade trappmatriser från start så rangen av I_m är m . Av definitionen följer att rangen av en matris ej ändras vid en radoperation.

- Vad vi förut sagt om lösbarheten hos ekvationssystem och matrisekvationer kan nu uttryckas mer precist: Matrisekvationen $AX = B$ är lösbar om och endast om matriserna A (koefficientmatrisen) och $(A \mid B)$ (totalmatrisen) har samma rang. Om ekvationen är lösbar så har vi oändligt många lösningar om och endast om rangen är mindre än antalet kolonner i A , men entydig lösning om och endast om rangen är lika med antalet kolonner i A (varje kolonn i A är då en pivotkolonn).
- En **högerinvers** till $m \times n$ -matrisen A är en $n \times m$ -matris X sådan $AX = I_m$. Denna matrisekvation är, som vi sett, lösbar om och endast om matriserna A och $(A \mid I_m)$ har samma rang. Eftersom I_m och därmed $(A \mid I_m)$ har rangen m så betyder det att A har högerinvers om och endast om A har rang m . En följd av detta är att $m \leq n$. Högerinversen är unik om och endast om $m = n$.

Exempel. Bestäm alla högerinverser till matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösning. Vi ska alltså bestämma samtliga lösningar till matrisekvationen $AX = I_2$. Med några radoperationer får vi

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

De båda första kolonnerna i A är pivotkolonner så x_3 är fri obekant. Genom att sätta $x_{31} = x_{32} = 0$ får vi högerinversen

$$X_s = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Om X är en godtycklig högerinvers och vi sätter $X_h = X - X_s$ så gäller

$$AX_h = AX - AX_s = I - I = O.$$

X_h är alltså en lösning till den homogena matrisekvationen $AX = O$. Lösningarna till denna ges av

$$(A \mid O) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Genom att sätta $x_{31} = t_1$, $x_{32} = t_2$ får vi den allmänna lösningen X_h till den homogena ekvationen $AX = O$:

$$X_h = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_1 & 2t_2 \\ -2t_1 & -2t_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (t_1 \ t_2).$$

Den allmänna lösningen till $AX = I_2$, alltså samtliga högerinverser till A , ges därför av

$$X = X_s + X_h = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (t_1 \ t_2) = \begin{pmatrix} 2+2t_1 & -5+2t_2 \\ -1-2t_1 & 3-2t_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix},$$

där t_1, t_2 är godtyckliga reella tal. □

- En **vänsterinvers** till $m \times n$ -matrisen A är en $n \times m$ -matris Y sådan $YA = I_n$, vilket är ekvivalent med att $A^t Y^t = I_n$ (Y^t är en högerinvers till A^t). Enligt ovan har därför A en vänsterinvers om och endast om A har rang n , vilket medför att $n \leq m$. Vänsterinversen är unik om och endast om $m = n$.

Exempel. Bestäm alla vänsterinverser till matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösning. Vänsterinverserna Y , till A , fås som transponaten av högerinverserna till A^t . Enligt föregående exempel gäller därför

$$Y^t = \begin{pmatrix} 2+2t_1 & -5+2t_2 \\ -1-2t_1 & 3-2t_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}.$$

Alltså har vi

$$Y = \begin{pmatrix} 2+2t_1 & -1-2t_1 & t_1 \\ -5+2t_2 & 3-2t_2 & t_2 \end{pmatrix},$$

där t_1, t_2 är godtyckliga reella tal. □

- Av de föregående punkterna följer direkt att en $m \times n$ -matris A har både en vänsterinvers och en högerinvers om och endast om A är kvadratisk (d.v.s $m = n$) med full rang. I så fall finns det alltså unika kvadratiska matriser X och Y sådana att $AX = I_n$ och $YA = I_n$. Av detta följer emellertid att

$$Y = YI_n = Y(AX) = (YA)X = I_n X = X,$$

så vänster- och högerinversen måste vara lika. Vi säger att X är **inversen** till A . Inversen till A brukar betecknas A^{-1} . För A^{-1} gäller alltså att

$$A^{-1}A = A A^{-1} = I_n.$$

Det effektiva sättet att bestämma A^{-1} är att lösa matrisekvationen $AX = I_n$. Ställ upp $(A \mid I_n)$ och gör radoperationer tills du får $(I_n \mid A^{-1})$.

Sammandragning 2:

Här gäller det vektorräkning, avstånd, skalärprodukt, vinklar och framför allt projektionen av en vektor på en annan vektor. Jag tar med en del om plan och räta linjer också (och till och med sfärer, men det kan du ignorera) trots att vi inte hinner med detta.

- Ortonormerade koordinatsystem i planet ($\mathbb{R}^2$) och rummet ($\mathbb{R}^3$) (där det kan vara ett högersystem eller ett vänstersystem). Varje punkt P i rummet har entydiga koordinater (x, y, z) . Exempelvis har origo O koordinaterna $(0, 0, 0)$.

Vektorn $\mathbf{r}$ från O till P kallas för lägesvektorn för punkten P och vi skriver $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$. Lägesvektorn betecknas alltså på exakt samma sätt som punkten $P = (x, y, z)$ (när de uttrycks med koordinaterna). Vi uttrycker oss ofta slarvigt och skriver t.ex. saker som "vektorn från punkten $\mathbf{r}_0 = (1, -2, 3)$ till punkten $\mathbf{r}_1 = (2, -1, 2)$ fås genom att...", trots att det är fråga om lägesvektorer snarare än punkter.

För lägesvektorn, som för övrigt är en helt godtycklig vektor i rummet, har vi

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Uttrycket $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ visar tydligt att det är fråga om en vektor och är, av just detta skäl, att föredra framför uttrycket (x, y, z) .

Längden av vektorn $\mathbf{r}$ betecknas $|\mathbf{r}|$ och definieras som $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Denna längd är lika med avståndet från punkten P till origo.

Vektorn från en punkt $A = (a_1, a_2, a_3)$ till en punkt $B = (b_1, b_2, b_3)$ betecknas $\overrightarrow{AB}$ och vi har

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\mathbf{i} + (b_2 - a_2)\mathbf{j} + (b_3 - a_3)\mathbf{k}$$

och

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2},$$

vilket är lika med avståndet mellan A och B .

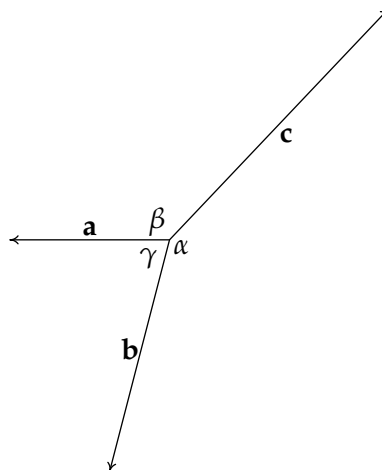
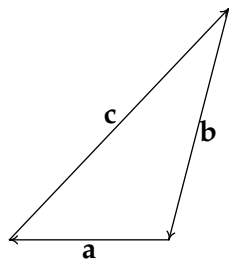
- Skalärprodukten av två vektorer $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta,$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Exempel. För de tre vektorerna $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ gäller att $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 4$ och $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \vec{0}$. Bestäm $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ samt vinklarna mellan vektorerna.

Lösning. Att vektorsumman är noll betyder att när vi lägger vektorerna svans vid spets, som i den vänstra figuren, bildas en triangel. Låt γ vara vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. Låt β vara vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{c}$ och låt slutligen α vara vinkeln mellan $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$. Se på den högra figuren, där vektorerna lagts med svansarna i samma punkt.



Genom att ta skalärprodukten av båda leden, i likheten $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \vec{0}$, med $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ respektive $\mathbf{c}$ får vi

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 4 + 6 \cos \gamma + 8 \cos \beta \\ 0 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 6 \cos \gamma + 9 + 12 \cos \alpha \\ 0 &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 8 \cos \beta + 12 \cos \alpha + 16 \end{aligned}$$

vilket ju är ett linjärt ekvationssystem med $\cos \gamma$, $\cos \beta$, $\cos \alpha$ som obekanta. Löser vi detta (gör det!) så får vi

$$\cos \gamma = \frac{1}{4}, \quad \cos \beta = -\frac{11}{16}, \quad \cos \alpha = -\frac{7}{8}.$$

Alltså gäller

$$\gamma = \arccos \frac{1}{4}, \quad \beta = \arccos \left(-\frac{11}{16} \right), \quad \alpha = \arccos \left(-\frac{7}{8} \right)$$

och

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{(2)(3)}{4} = \frac{3}{2}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \frac{(2)(4)(-11)}{16} = -\frac{11}{2}, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \frac{(3)(4)(-7)}{8} = -\frac{21}{2}.$$

□

- Projektionen $\mathbf{u}_v$ av vektorn $\mathbf{u}$ längs vektorn $\mathbf{v}$, som ges av

$$\mathbf{u}_v = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}.$$

Exempel. Låt $\mathbf{a}$ och $\mathbf{c}$ vara som i föregående exempel. Bestäm projektionen av $\mathbf{a}$ längs $\mathbf{c}$ och projektionen av $\mathbf{c}$ längs $\mathbf{a}$.

Lösning. Enligt ovan har vi

$$\mathbf{a}_c = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}} \mathbf{c} = \frac{-\frac{11}{2}}{16} \mathbf{c} = -\frac{11}{32} \mathbf{c}, \quad \mathbf{c}_a = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{-\frac{11}{2}}{4} \mathbf{a} = -\frac{11}{8} \mathbf{a}.$$

□

- En normalekvation för ett plan har utseendet $ax + by + cz = d$. Vektorn $\mathbf{n} = (a, b, c) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ är en normal till planet. Ekvationen kan också skrivas som $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = d$, där $\mathbf{r} = (x, y, z)$ är lägesvektorn för en godtycklig punkt på planet.

Planet delar rummet i två "halvor", så kallade halvrum. Punkterna som ligger i halvrummet som $\mathbf{n}$ pekar in i (det positiva halvrummet) ges av olikheten $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} > d$, d.v.s $ax + by + cz > d$. Punkterna i det andra halvrummet (det negativa halvrummet) ges av olikheten $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} < d$, d.v.s $ax + by + cz < d$.

Exempel. Avgör om punkterna $(1, -1, 1)$ och $(5, 5, 2)$ ligger på samma sida av planet $x - 2y + 3z = 4$.

Lösning. Vi har

$$(1) - 2(-1) + 3(1) = 6 > 4 \quad \text{och} \quad (5) - 2(5) + 3(2) = 1 < 4$$

Den första punkten ligger därför på den positiva sidan av planet, medan den andra punkten ligger på den negativa sidan av planet. Punkterna ligger alltså inte på samma sida. $\square$

Ekvationen $-ax - by - cz = -d$ beskriver samma plan som ekvationen $ax + by + cz = d$. Vilken sida som är positiv beror på vilken ekvation vi väljer. Om vi i exemplet hade valt ekvationen $-x + 2y - 3z = -4$ för planet hade den första punkten legat på den negativa sidan medan den andra punkten hade legat på den positiva sidan.

- En ekvation på vektorform för den rätta linjen som går genom punkten (x_0, y_0, z_0) parallellt med vektorn $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ är

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) = (x_0 + v_1t, y_0 + v_2t, z_0 + v_3t), \quad -\infty < t < \infty.$$

Mer kompakt: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, $-\infty < t < \infty$.

- Om $\mathbf{v}$ ej är vinkelrät mot $\mathbf{n}$ så skär linjen $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ planet $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = d$ i en unik punkt. Lägesvektorn $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{v}$, för skärningspunkten, uppfyller även ekvationen

$$d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{v}).$$

Alltså

$$d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 + \tau \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \tau = \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}.$$

Avståndet från $\mathbf{r}_0$ till skärningspunkten $\mathbf{r}$ är därför

$$|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 - d| |\mathbf{v}|}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}$$

Om vi här låter $\mathbf{v} = \mathbf{n}$ så går linjen vinkelrätt mot planet och skärningspunkten är den punkt på planet som ligger närmast $\mathbf{r}_0$. Det betyder att skärningspunkten är

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}$$

och avståndet δ , från $\mathbf{r}_0$ till planet, är

$$\delta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 - d| |\mathbf{n}|}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}|} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 - d|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exempel. Bestäm, för varje reellt värde på konstanten d , avståndet δ från punkten $\mathbf{r}_0 = (5, 5, 2)$ till planet $x - 2y + 3z = d$. Ange även den punkt på planet som ligger närmast $\mathbf{r}_0$.

Lösning. Enligt ovanstående formel för avståndet punkt - plan får vi

$$\delta = \frac{|(5) - 2(5) + 2(2) - d|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|-1 - d|}{3} = \frac{|d + 1|}{3}.$$

Speciellt ser vi att om $d = -1$ så är avståndet noll, d.v.s punkten $\mathbf{r}_0 = (5, 5, 2)$ ligger på planet. Punkten på planet som ligger närmast $\mathbf{r}_0$ är

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} = (5, 5, 2) + \frac{d + 1}{9} (1, -2, 2) = \left(\frac{46 + d}{9}, \frac{43 - 2d}{9}, \frac{20 + 2d}{9} \right).$$

□

- En ekvation för sfären med centrum i $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och radien R är

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Antag nu att avståndet från planet $ax + by + cz = d$ till punkten $\mathbf{r}_0$ är δ , d.v.s

$$\delta = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

När det gäller avståndet mellan planet och sfären har vi tre fall:

- Om $\delta > R$ är avståndet mellan planet och sfären $\delta - R$.
- Om $\delta = R$ är avståndet mellan planet och sfären noll och planet tangerar sfären.
- Om $\delta < R$ är avståndet mellan planet och sfären fortfarande noll, men nu skär planet sfären längs en cirkel som har centrum i punkten där linjen $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \mathbf{n}$ skär planet (se ovan) och radien $\rho = \sqrt{R^2 - \delta^2}$.

Exempel.

- För vilka värden på d tangerar planet $x - 2y + 2z = d$ sfären $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 2)^2 = 9$? Bestäm i förekommande fall även tangeringspunkten.
- För vilka värden på d skär planet $x - 2y + 2z = d$ sfären $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 2)^2 = 9$ i en cirkel? Bestäm i förekommande fall även cirkelns medelpunkt och radie.

Lösning. Vi utnyttjar ovanstående uträkningar och får:

- Sfären har centrum i $(5, 5, 2)$ och radien 3. Planet kommer därför att tangera sfären om avståndet δ , från planet till $(5, 5, 2)$, också är lika med 3. Detta ger oss ekvationen

$$\frac{|d + 1|}{3} = 3, \quad |d + 1| = 9, \quad d + 1 = \pm 9, \quad d = -1 \pm 9.$$

Alltså har vi tangering då $d = 8$ eller $d = -10$. Tangeringspunkten är den punkt på planet som ligger närmast $(5, 5, 2)$. Då $d = 8$ är alltså tangeringspunkten $(8, -1, 8)$ och då $d = -10$ är tangeringspunkten $(2, 11, -4)$.

(b) Skärningen är en cirkel då

$$\delta = \frac{|d+1|}{3} < 3,$$

vilket ger $-10 < d < 8$. Skärningscirkeln har radien

$$\rho = \sqrt{3^2 - \delta^2} = \frac{\sqrt{80 - 2d - d^2}}{3} = \frac{\sqrt{(10+d)(8-d)}}{3}$$

och centrum i punkten

$$\left(\frac{46+d}{9}, \frac{43-2d}{9}, \frac{20+2d}{9} \right).$$

□

- – Mängden av alla punkter som ligger ovanför planet $z = 1$ och under, eller på, planet $z = 3$ beskrivs av den dubbla olikheten $1 < z \leq 3$.
- Punkterna (x, y, z) som uppfyller båda olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 < 4$, $x - y + 2z > 0$ bildar ett (öppet) halvklot, närmare bestämt den klothalva som ligger på den positiva sidan av planet.
- Kryssprodukten av två vektorer och dess beräkning med hjälp av en determinant.

Sammandragning 3. Här förbereder vi tentan genom att besvara kvarvarande frågor och gå igenom gamla tentor. Speciellt viktigt är det att inga oklarheter finns gällande övningstentan.