UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Styf, 0707-253107

Prov i matematik
Distanskurs
Linjär algebra o geometri 1
2010-05-06

Skrivtid: 14.00–19.00 . Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Varje uppgift är värd 5 poäng. Lösningarna skall vara försedda med förklarande text. Skriv läsbart!

1. Bestäm pivotkolonnerna i matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -7 & 12 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

och skriv övriga kolonner som linjärkombinationer av pivotkolonnerna.

2. (a) Bestäm inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) Lös matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Låt L_1 vara skärningslinjen mellan planen $x-y+2z-3=0$ och $x+y-2z+3=0$ och låt L_2 vara skärningslinjen mellan planen $x-y-z-11=0$ och $2x+2y+z-5=0$. Bestäm en ekvation för planet som går genom punkten $(1,2,3)$ och är parallellt med både L_1 och L_2.

5. Ange för vilka värden på den reella konstanten a som ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + ay - z = a+1 \\ x + (a-1)z = 2 \\ ax + 2z = a+2 \end{cases}$$

(i) saknar lösning,

(ii) har oändligt många lösningar,

(iii) har en unik lösning. (Observera att systemet ej behöver lösas.)

6. Π är planet $x - y + z = 1$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$, där $A = (1, 0, 3)$, $B = (2, 4, 0)$. Skriv vektorn $\mathbf{w}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med Π och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot Π.

7. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning T som geometriskt kan beskrivas som speglingen i planet $x + y - 2z = 0$. Bestäm alla vektorer $\mathbf{v}$ sådana att $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$.

8. Låt $ABCD$ vara tetraedern med hörnen $A,\ B,\ C$ i punkterna $(1, 2, 1)$, $(0, 3, 2)$ respektive $(4, 1, 1)$. Hörnet D befinner sig på det räta linjestycket $(x, y, z) = (t, t, t)$, $-1 \leq t \leq 1$. Bestäm t så att tetraedern får minsta möjliga volym och bestäm även denna volym.