UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Bo Styf

Linjär algebra I
distans
Vårterminen 2010

Lösningar till tentamen i linjär algebra och geometri I, 2010–05–06

1. Bestäm pivotkolonnerna i matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -7 & 12 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

och skriv övriga kolonner som linjärkombinationer av pivotkolonnerna.

Lösning. Vi gör radoperationer på matrisen tills vi får en reducerad trappmatris:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -7 & 12 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

De två första kolonnerna, $\mathbf{c}_1$ och $\mathbf{c}_2$, i C är pivotkolonner. För de övriga kolonnerna gäller $\mathbf{c}_3 = -\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_4 = 2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_5 = \mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2$. Definitionsmässigt är därför de två första kolonnerna, $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$, i A, pivotkolonner. För de övriga kolonnerna i A gäller, på grund av att A och C är radekvivalenta, att $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$. $\square$

2. (a) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) Lös matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning. (a) Med standardmetoden för matrisinvertering får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Alltså har vi

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Låt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Genom att multiplicera ekvationen $B \cdot X \cdot A = C$ till vänster med B^{-1} och till höger med A^{-1} så får vi

$$\begin{aligned} X &= B^{-1} C\, A^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} A^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ -7 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 27 & 3 & 6 \\ -15 & -2 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Lösning. Genom successiva rad- och kolonnoperationer, som inte förändrar värdet på determinanten, samt utveckling efter lämplig rad eller kolonn, får vi

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 1 & x \\ x+2 & 1 & x & 1 \\ x+2 & x & 1 & 0 \\ x+2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x+2) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x+2) \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 0 & x & 0 \\ x-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= x(x+2) \begin{vmatrix} -1 & x-1 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} = x(x+2) \begin{vmatrix} -x & x \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= x^2(x+2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} = -x^2(x+2)(x-2). \end{aligned}$$

Det är nu lätt att avläsa ekvationens rötter $x = 0, -2, 2$. □

4. Låt L_1 vara skärningslinjen mellan planen $x - y + 2z - 3 = 0$ och $x + y - 2z + 3 = 0$ och låt L_2 vara skärningslinjen mellan planen $x - y - z - 11 = 0$ och $2x + 2y + z - 5 = 0$. Bestäm en ekvation för planet Π, som går genom punkten $(1, 2, 3)$ och är parallellt med både L_1 och L_2.

Lösning. De fyra planens normalvektorer, skrivna som kolonnmatriser, är

$$\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{m}_1 \times \mathbf{n}_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & 1 & 1 \\ \mathbf{j} & -1 & 1 \\ \mathbf{k} & 2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{m}_2 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 1 & 2 \\ \mathbf{j} & -1 & 2 \\ \mathbf{k} & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

är därför parallella med L_1 respektive L_2. Eftersom planet Π går genom punkten $P_0 = (1, 2, 3)$ och är parallellt med $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ ges dess ekvation på determinantform av

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-2 & 2 & -3 \\ z-3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 11(x-1) + (y-2) - 2(z-3).$$

$\square$

5. Ange för vilka värden på den reella konstanten a som ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + ay - z = a+1 \\ x + (a-1)z = 2 \\ ax + 2z = a+2 \end{cases}$$

(i) saknar lösning,

(ii) har oändligt många lösningar,

(iii) har en unik lösning. (Observera att systemet ej behöver lösas.)

Lösning. Vi tar först reda på för vilka värden på a som koefficientmatrisen har nolldeterminant:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ 1 & 0 & a-1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-a)\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a & 2 \end{vmatrix} \\ &= a(a^2 - a - 2) = a(a+1)(a-2) \end{aligned}$$

Då $a \neq 0, -1, 2$ är koefficientmatrisen inverterbar, vilket medför att systemet har en entydig lösning.

Då $a = 0$ blir systemet, skrivet på matrisform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Den sista raden i den högra matrisen svarar mot den orimliga ekvationen $0 = 1$. Alltså saknar systemet lösningar.

Då $a = -1$ blir systemet, skrivet på matrisform

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Den sista raden i den högra matrisen svarar mot den orimliga ekvationen $0 = 3$. Alltså saknar systemet lösningar.

Då $a = 2$ blir systemet, skrivet på matrisform

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

I det högra systemet har koefficientmatrisen och totalmatrisen rang två. Systemet har därför oändligt många lösningar. □

6. Π är planet $x - y + z = 1$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$, där $A = (1, 0, 3)$, $B = (2, 4, 0)$. Skriv vektorn $\mathbf{w}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med Π och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot Π.

Lösning. Vi har $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB} = (1, 4, -3)$. Låt $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$ (planets normalvektor). Då gäller att $\mathbf{v}$ är projektionen av $\mathbf{w} = (1, 4, -3)$ på $\mathbf{n}$, alltså

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1-4-3}{3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

□

7. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning T som geometriskt kan beskrivas som speglingen i planet $x + y - 2z = 0$. Bestäm alla vektorer $\mathbf{v}$ sådana att $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$.

Lösning. Låt $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (planets normalvektor). För en godtycklig vektor $\mathbf{v}$ gäller då att $\mathbf{w} = T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\mathbf{q}$, där $\mathbf{q}$ är projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{n}$. Vi har

$$\mathbf{q} = \mathbf{n}\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}} = \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n}^t\mathbf{v} = Q\mathbf{v},$$

där

$$Q = \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n}^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}(1\;1\;-2) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = Q^2.$$

Om vi betecknar T:s standardmatris med S gäller alltså $T(\mathbf{v}) = (I - 2Q)\mathbf{v} = S\mathbf{v}$, där

$$\begin{aligned} S &= I - 2Q \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eftersom $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} - 2\mathbf{q} = -\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{q}$ gäller att $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ om och endast om $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot planet. □

8. Låt $ABCD$ vara tetraedern med hörnen A, B, C i punkterna $(1,2,1)$, $(0,3,2)$ respektive $(4,1,1)$. Hörnet D befinner sig på det räta linjestycket $(x,y,z) = (t,t,t)$, $-1 \leq t \leq 1$. Bestäm t så att tetraedern får minsta möjliga volym och bestäm även denna volym.

Lösning. Vi har $D = (t,t,t)$, vilket ger

$$\overrightarrow{AB} = (-1,1,1) \quad \overrightarrow{AC} = (3,-1,0) \quad \overrightarrow{AD} = (t-1, t-2, t-1)$$

För volymen V av tetraedern $ABCD$ gäller

$$\begin{aligned} \pm 6V = \det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 3 \\ t-2 & 1 & -1 \\ t-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 3 \\ 2t-3 & 0 & 2 \\ 2t-2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2t-3 & 2 \\ 2t-2 & 3 \end{vmatrix} = 2t - 5. \end{aligned}$$

Alltså har vi

$$V = \frac{|2t-5|}{6} = \frac{|t-\frac{5}{2}|}{3} \geq \frac{|1-\frac{5}{2}|}{3} = \frac{1}{2}.$$

Minsta volymen $V = \frac{1}{2}$ fås alltså då $t = 1$. □