

Studieanvisningar.

Kurslitteratur:

- H. Anton och C. Rorres: *Elementary Linear Algebra*, 9:e upplagan. Wiley, 2005 (betecknas A nedan).
- Inger Sigstam: Linjärt beroende och linjärt oberoende (betecknas IS nedan).
- Ryszard Rubinsztein: Vektorrummet $\mathbb{R}^n$ (betecknas RR nedan).

Innehållet i kursen är följande :

Avsnitt i A	Innehåll
1.1-1.2	Linjära ekvationssystem, Gausselimination
1.3	Matriser, matrisräkning.
1.4-1.5	Matrisinvers
1.6-1.7	Speciella typer av matriser och deras egenskaper.
2.1-2.2	Determinanter.
2.3-2.4	Determinantregler.
3.1-3.2	Vektorer.
3.3	Skalarprodukt.
3.4	Vektorprodukt
3.5	Linjer och plan i rummet.
4.1	Det euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$
IS, RR	Linjärt oberoende av vektorer, baser, koordinater.
4.2	Linjära avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$.
4.3-4.4	Egenskaper hos linjära avbildningar, polynom.

Kurshemsida:

<http://www.math.uu.se/~styf/la1vt10>

Här hittar du allt kursrelevant material. Besök sidan varje dag så att du inte missar något.

Lärare:

Bo Styf: styf@math.uu.se, 0707-253107, Skype: byfsto

Rekommenderade problem m.m.

Du bör lösa de flesta av problemen som anges nedan. Speciellt bör du innan tentan klara problemen som givits på tidigare tentor/duggor, så ägna dem särskild uppmärksamhet. Gå igenom relevanta lösta exempel (pdf-fil på kurshemsidan, gamla tentor m.m.) i samband med problemlösningen. Glöm inte att skriva upp och fråga om allt du kör fast på.

Kapitel 1

Handlar om linjära ekvationssystem och matriser. Följande är viktigt:

- Gausselimination: Att till **en** ekvation addera en multipel av en **annan** ekvation (för att eliminera en av de obekanta). Att multiplicera en ekvation med ett nollskilt tal (för att få koefficienten 1 för en av de obekanta eller kanske av något annat skäl). Att kasta om ordningen mellan ekvationerna (betydelselöst, förutom att man kan se saker tydligare).
- Metoden att skriva ett ekvationssystem på matrisform $((A|b))$, där A är koefficientmatrisen och b högerledet i ekvationssystemet) och lösa systemet genom att med elementära radoperationer transformera matrisen till en **trappmatris**. Att av denna trappmatris kunna utläsa om systemet är lösbart och i så fall vilka av de obekanta (variables som de kallas på engelska) som är **fria** (alltså som du kan ge godtyckliga värden) respektive **bundna** (alltså vars värden är helt bestämda av värdena på de fria obekanta). $(A|b)$ kallas för den utvidgade (augmented på engelska) matrisen.
- Hur man från en trappmatris avläser lösningarna till motsvarande ekvationssystem. Se exempel 3 i avsnitt 1.2. Observera att systemet som svarar mot trappmatrisen har exakt samma lösningar som systemet som svarar mot $(A|b)$ (alltså det ekvationssystem du fick i uppgift att lösa).
- Gauss/Jordan-elimination: Att fortsätta med radoperationerna ända tills man får en **reducerad trappmatris** och att avläsa systemets lösningar ur denna. Se exemplen 4 och 7 i avsnitt 1.2.
- Återsubstitution (back-substitution på engelska): Att avsluta radopererandet när man kommer fram till en trappmatris (troligtvis inte reducerad), uttrycka de bundna obekanta i termer av de fria och sedan sätta in dessa uttryck ”nerifrån och upp”. Se exempel 5 i avsnitt 1.2.
- Hur man avgör om ett ekvationssystem är **homogent** eller **inhomogent** och varför ett homogent ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar. Se THEOREM 1.2.1, avsnitt 1.2.
- Begreppen $m \times n$ -matris, radmatris (=radvektor), kolonnmatris (=kolonnvektor) (utan att förglömma trappmatriserna!). Se avsnitt 1.3.
- Hur man avgör om två matriser är lika ($A = B$). Hur man adderar två matriser ($A + B$). Hur man multiplicerar en matris med ett tal (cA). Hur man avgör om två matriser A, B går att multiplicera och hur produkten AB då ser ut. Se exemplen 3 - 7 i avsnitt 1.3.

- Att en matrisprodukt $A\mathbf{x}$, av en $m \times n$ -matris A och en kolonnvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, kan ses som en **linjärbkombination** av kolonnvektorerna i A , alltså

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}_1x_1 + \cdots + \mathbf{a}_nx_n, \quad \text{där} \quad \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \quad k = 1, \dots, n.$$

Detta betyder att ekvationssystemet med koefficientmatrisen A , obekanta $x_1, \dots, x_n$ och högerleden $b_1, \dots, b_m$ kan skrivas som matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (jämför med $(A|b)$). Se exemplen 8 och 9 i avsnitt 1.3.

- Om A är en given $m \times n$ -matris och $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ säger man att $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ är en **linjär funktion** av $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Se exempel 10, avsnitt 1.3.
- **Transponatet** A^T av en $m \times n$ -matris A är $n \times m$ -matrisen vars rader (kolonner) är lika med kolonnerna (raderna) i A . Se exempel 11, avsnitt 1.3 och även THEOREM 1.4.9, avsnitt 1.4 (där bland annat visas att $(AB)^T = B^T A^T$).
- **Spåret** av en kvadratisk matris A är summan av talen i A :s **huvuddiagonal**. Se exempel 12, avsnitt 1.3.
- Lagar för matrisräkning: Observera att normalt gäller $AB \neq BA$ och $AB = 0$ medför **inte** att $A = 0$ eller $B = 0$ (här betecknar 0 en **nollmatris**, vilket är en matris med enbart nollor). Se THEOREM 1.4.1, exemplen 1 - 3 samt THEOREM 1.4.2 (om nollmatriser), avsnitt 1.4. Däremot gäller den **associativa lagen** $A(BC) = (AB)C$.
- Enhetsmatriser: $I = I_n$ är $n \times n$ -matrisen (kvadratisk matris) med ettor i huvuddiagonalen och nollor på alla andra platser. För en godtycklig $m \times n$ -matris A gäller $I_m A = A = A I_n$. Se exempel 4 och THEOREM 1.4.3, avsnitt 1.4.
- Matrisinverser: En kvadratisk matris A är **inverterbar** om det finns en matris B sådan att $AB = BA = I$. B är då en **invers** till A . I THEOREM 1.4.4, avsnitt 1.4, visas att inversen är unik så man kan skriva $B = A^{-1}$ ($AA^{-1} = A^{-1}A = I$). Du bör kunna formeln för inversen av en 2×2 -matris (THEOREM 1.4.5, avsnitt 1.4.)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{t.ex.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

och lagarna $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

- Matrispotenser: $A^0 = I$, $A^n = A(A^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. $A^{-n} = (A^{-1})^n$ (bara om A^{-1} existerar förstås). Se ex. 8 - 9 i avsnitt 1.4. Vid potensberäkning är det effektivast att gruppera "binärt", t.ex.

$$A^{29} = AA^4A^8A^{16} = A(A^2)^2((A^2)^2)((A^2)^2)^2.$$

- Elementära matriser (avsnitt 1.5): En sådan erhålls genom att man utför **en** elementär radoperation på en enhetsmatris. Varje elementär matris E är inverterbar och E^{-1} är också elementär (THEOREM 1.5.2). Se ex. 2 - 3, avsnitt 1.5. Resultatet av en radoperation på A kan skrivas EA , där E är den elementarmatris som svarar mot radoperationen

(THEOREM 1.5.1). Genom en följd radoperationer kan varje matris A transformeras till en reducerad trappmatris R , dvs det finns en följd elementarmatriser $E_1, \dots, E_k$ sådana att $E_k \cdots E_1 A = R$. Alltså gäller $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} R$. Varje matris kan alltså skrivas som en produkt av ett antal elementarmatriser och (längst till höger) en reducerad trappmatris R . En reducerad trappmatris R är inverterbar om $R = I$. Detta ger omedelbart THEOREM 1.5.3. Speciellt viktigt i den satsen är att A^{-1} existerar om och endast om det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ bara har den triviala lösningen $\mathbf{x} = \vec{0}$.

- En konsekvens av ovanstående är standardmetoden för beräkning av A^{-1} : Bilda matrisen $(A \mid I)$ (I är enhetsmatrisen av samma ordning som A). Gör sedan radoperationer tills du får en reducerad trappmatris $(I \mid B)$. Då gäller att $A^{-1} = B$. Uppstår det någon gång en nollrad till vänster om $|$ så är A inte inverterbar. Se ex. 4, 5, 6 i avsnitt 1.5.
- För att lösa ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan vi skriva det på matrisform $(A \mid \mathbf{b})$ och göra ett antal radoperationer tills vi erhåller en reducerad trappmatris $(R \mid \mathbf{c})$. Ekvationssystemet $R\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har precis samma lösningar som det ursprungliga systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, men är mycket enklare att analysera. Vi har följande alternativ:
 - (i) Om $(R \mid \mathbf{c})$ har en rad med utseendet $0 \dots 0 \mid 1$ (måste vara den sista nollskilda raden) så svarar det mot att systemet $R\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en orimlig ekvation $0 = 1$. Alltså saknar ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösningar i detta fall.
 - (ii) Om det ej finns någon orimlig rad enligt ovan och antalet nollskilda rader i $(R \mid \mathbf{c})$ är lika med antalet obekanta så har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ precis en lösning.
 - (iii) Om det ej finns någon orimlig rad enligt ovan och antalet nollskilda rader i $(R \mid \mathbf{c})$ är mindre än antalet obekanta så har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ oändligt många lösningar.

Se THEOREM 1.6.1. Man definierar **rangen** av en matris A som antalet nollskilda rader i den reducerade trappmatrisen R som är radekvivalent med A . Ovanstående kan då uttryckas som att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart om A har samma rang som $(A \mid \mathbf{b})$. Om systemet är lösbart så är lösningen unik om rangen är lika med antalet obekanta och man har oändligt många lösningar om rangen är mindre än antalet obekanta. Läs igenom alla exemplen i avsnitt 1.6.

Har vi ett antal ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_p$, med samma koefficientmatris A (av typ $m \times n$) men olika högerled $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p$, kan dessa lösas samtidigt genom lösandet av **matrisekvationen** $AX = B$, där kolonn k i den obekanta matrisen X (av typ $n \times p$) svarar mot de obekanta $\mathbf{x}$ i systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$, vars högerled $\mathbf{b}_k$ utgör kolonn k i matrisen B (av typ $m \times p$).

Matrisekvationen $AX = B$ löser vi genom att sätta upp totalmatrisen $(A \mid B)$ och göra ett antal radoperationer tills vi erhåller en reducerad trappmatris $(R \mid C)$. $AX = B$ är lösbart om och endast om $(R \mid C)$ INTE har en rad med utseendet $0 \dots 0 \mid c_{r1} c_{r2} \cdots c_{rp}$ där $c_{rk} \neq 0$ för något k (svarar mot att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$ saknar lösningar). Detta kan uttryckas som att $AX = B$ är lösbart om och endast om $\text{rang}(A \mid B) = \text{rang}(A)$.

- THEOREM 1.6.3 är ett specialfall av THEOREM 1.6.5: AB är inverterbar om både A och B är inverterbara (och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$). THEOREM 1.6.5 bevisas lika lätt som THEOREM 1.6.3 på följande sätt: Antag att $AB = C$, där C är inverterbar. Vi har då att $C^{-1}AB = C^{-1}C = I$. Om $B\mathbf{x} = \vec{0}$ så gäller $\mathbf{x} = I\mathbf{x} = C^{-1}AB\mathbf{x} = C^{-1}A\vec{0} = \vec{0}$. Alltså har

ekvationssystemet $B\mathbf{x} = \vec{0}$ bara den triviala lösningen $\mathbf{x} = \vec{0}$. Av THEOREM 1.5.3 följer att B är inverterbar $\implies A = ABB^{-1} = CB^{-1} \implies A^{-1} = BC^{-1}$ (kontrollera!). Antag i stället att både A och B är inverterbara. Du verifierar lätt att $B^{-1}A^{-1}$ är en invers till AB .

- I avsnitt 1.7: Uppåt triangulära-, nedåt triangulära- och symmetriska matriser. Diagonalmatriser (som samtidigt är uppåt triangulära-, nedåt triangulära- och symmetriska!). Gå igenom alla exemplen i avsnittet.

A: avs.1.1, s.6-8: 1, 2, 3(b)(c), 4(c), 5(c), 6 - 9, 12 - 14,

A: avs.1.2, s.19-23: 3, 4(c)(d), 5(c)(d), 8, 9, 12, 13(a)(b), 16 - 19, 22, 26, 31,

A: avs.1.3, s.34-38: 1, 4(e)(f), 5(a)(b)(d)(e)(i), 8, 9, 10, 13, 14, 18, 21, 27, 31,

A: avs.1.4, s.48-51: 4(c), 7(d), 9(c), 11, 14, 17, 21,

A: avs.1.5, s.57-60: 1, 2, 3, 7(b)(d), 8(e), 10, 13, 14,

A: avs.1.6, s.66-68: 8, 11, 15, 21, 25,

A: avs.1.7, s.73-76: 11, 18, 22.

Problem att lösa i gamla tentor/duggor m.m:

Tentan 2009-01-08:	1, 2, 5
Tentan 2008-10-24:	1, 2, 6
Tentan 2008-08-21:	2, 5
Tentan 2008-03-27:	1, 2, 4, 8
Tentan 2008-01-09:	1, 2, 4(d)
Tentan 2007-12-17:	1, 2, 4, 8
Tentan 2007-10-22:	1, 2, 3
Duggan 2008-10-09:	1
Duggan 2008-02-18:	1, 2, 3
Duggan 2007-11-26:	1, 2, 3(d)
Duggan 2007-10-02:	1, 2, 3, 4(d)
Inlupp 1, 2008:	1, 2, 3, 4

Ytterligare ett par uppgifter:

1. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} -ax + y + 2z = 3 \\ 2x + (a+2)y + z = 2 \\ (1-a)x + y + z = 2 \end{cases}$$

för alla värden på konstanten a .

2. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + 2y + bz = 1 \\ bx + y + z = 1 + b \\ bx + 2by + b^2z = 1 + b - b^2 \\ 2bx + (1 + 2b)y + 2z = b \end{cases}$$

för alla värden på konstanten b .

Facit:

1. $a \neq \pm 1$: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a}, \frac{2-a}{1-a}\right),$

$a = -1$: $(x, y, z) = (t, 1 - 3t, 1 + t), t \in \mathbb{R},$

$a = 1$: inga lösningar.

2. $b \neq -1$: inga lösningar,

$b = -1$: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{3} + t, \frac{1}{3}, t\right), t \in \mathbb{R}.$

Kapitel 2

Handlar om determinanter. Följande är viktigt:

- Determinanten $\det A$ av en kvadratisk matris A är ett **tal**, ingenting annat. För en 2×2 -matris har vi till exempel

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

De vertikala strecken här har ingenting att göra med absolutbelopp utan är bara en gammal beteckning för determinant (som infördes av Leibniz). Determinanten av en godtycklig kvadratisk matris definieras sedan induktivt, i avsnitt 2.1, genom så kallad **cofactor expansion along the first row**. På svenska säger man **algebraiskt komplement** i stället för "cofactor". Se definitionen av minor (samma ord på både svenska och engelska!) och cofactor samt ex. 1 - 2, avsnitt 2.1. Det går att visa att man kan utveckla determinanten längs en godtycklig rad eller kolumn (THEOREM 2.1.1). Bäst är då att välja en rad eller kolumn med många nollor. Se ex. 3 - 4, avsnitt 2.1. I boken hoppar man över många bevis, speciellt i 2.1 och 2.2.

- Adjunkten $\text{adj}(A)$ till en kvadratisk matris A definieras som matrisen vars i :te rad består av de algebraiska komplementen till den i :te kolumnen i A . Av egenskaperna hos utveckling efter rad/kolumn följer att

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \quad (*)$$

Om $\det(A) \neq 0$ är alltså A inverterbar. Se ex. 5 - 7, avsnitt 2.1. Det bör påpekas att standardmetoden för beräkning av matrisinversen i allmänhet är mycket effektivare än (*).

- Att använda utveckling efter rad/kolumn för att beräkna en determinant är i allmänhet ineffektivt. Ett undantag är om matrisen A är triangulär (enbart nollor ovanför eller under huvuddiagonalen). Då är determinanten lika med produkten av talen i huvuddiagonalen. Alltså $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ (THEOREM 2.1.3). Se ex. 8, avsnitt 2.1.
- Cramers regel (THEOREM 2.1.4) är också den, i allmänhet, ett mycket ineffektivt sätt att lösa ett kvadratisk linjärt ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Värdet ligger i stället på det teoretiska planet. Se ex. 9, avsnitt 2.1.
- I avsnitt 2.2 visas hur man i praktiken går till väga för att beräkna en determinant. Speciellt viktig är regeln i THEOREM 2.2.3(c): Om B är matrisen som uppstår då en multipel av en rad (kolumn) i A adderas till **en annan** rad (kolumn) i A så gäller att $\det(B) = \det(A)$. Kombinerar man denna med THEOREM 2.2.3(b) (Om B är matrisen som uppstår då två rader (eller två kolumner) i A byter plats så gäller att $\det(B) = -\det(A)$) så kan man successivt transformera A till en triangulär matris C sådan att $\det(A) = \pm \det(C) = \pm c_{11}c_{22} \cdots c_{nn}$. Gå nog igenom alla exemplen i avsnittet.
- I avsnitt 2.3 visas
 - (1) Om A är en $n \times n$ -matris och $k \in \mathbb{R}$ så gäller $\det(kA) = k^n \det(A)$.
 - (2) Det är nästan alltid sant att $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$. (Försök hitta två exempel då $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$)
 - (3) Om matriserna A , B , C är lika förutom att tredje raden i C är lika med summan av tredje raden i A och tredje raden i B så gäller att $\det(C) = \det(A) + \det(B)$ (det behöver inte vara just tredje raden!). Motsvarande gäller för kolumner.
 - (4) Om B är en $n \times n$ -matris och E är en elementär $n \times n$ -matris så gäller $\det(EB) = \det(E) \det(B)$.
 - (5) Om A , B är godtyckliga $n \times n$ -matriser så gäller $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
 - (6) En $n \times n$ -matris A är inverterbar om $\det(A) \neq 0$.
 - (7)

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Se ex. 1 - 6 i avsnitt 2.3.

- I avsnitt 2.4 behandlas den klassiska metoden att definiera determinanten

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

av en $n \times n$ -matris A . Ägna inte så mycket uppmärksamhet åt detta!

A: avs.2.1, s.94-96: 3(a)(b), 4, 9, 12, 18, 22, 31,

A: avs.2.2, s.101-103: 2, 3, 9, 12, 13, 14,

A: avs.2.3, s.109-111: 3, 4(a)(b), 7, 8, 10, 16,

A: avs.2.4, s.117-118: 6 - 9, 13.

Problem att lösa i gamla tentor/duggor m.m:

Tentan 2009-01-08:	3
Tentan 2008-10-24:	3
Tentan 2008-08-21:	3
Tentan 2008-03-27:	3
Tentan 2008-01-09:	3, 4
Tentan 2007-12-17:	3
Tentan 2007-10-22:	4
Duggan 2008-10-09:	2(a)
Duggan 2008-02-18:	4
Duggan 2007-11-26:	3, 4
Duggan 2007-10-02:	4
Determinanter:	Extra övning

Ytterligare några uppgifter:

1. Beräkna följande determinant D av ordning $n \geq 2$:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ b & b & b & \dots & b & x \end{vmatrix}.$$

Lös även ekvationen $D = 0$ i de fall då $a \geq 0$, $b \geq 0$.

2. Beräkna följande determinant D av ordning $n + 1$:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

är en determinant av ordning n . Visa att det finns ett enkelt samband mellan D_n , D_{n-1} och D_{n-2} och använd detta för att beräkna D_n .

Facit:

1. $D = x^{n-2}(x^2 - ab)$, $D = 0$ har rötterna $\pm\sqrt{ab}$ och 0 (om $n \geq 3$).
2. $D_{n+1} = (1 - a)^n$.
3. Sambandet $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Determinanten $D_n = n + 1$.

Kapitel 3

Handlar om vektorer, skalärprodukt, vektorprodukt, räta linjer och plan. Följande är viktigt:

- En (geometrisk) vektor $\vec{u}$ eller $\mathbf{u}$ är en "pil" från en punkt A till en punkt B (i planet eller rummet). Vi skriver $\vec{u} = \mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$. Två vektorer $\vec{u} = \mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\vec{v} = \mathbf{v} = \overrightarrow{CD}$ är **lika** om $ABDC$ är en parallelogram, så en vektor ändrar sig inte om man parallellförflyttar den.
- Summa, $\vec{u} + \vec{v}$, multipel, $\lambda\vec{u}$, nollvektor, $\vec{0}$, motsatt vektor $-\vec{u}$. Räknelagar för vektorer.
- Ortonormerade koordinatsystem i planet och rummet (Oxy respektive $Oxyz$). Avståndsformeln. Koordinater för vektorer ($\vec{u} = (u_1, u_2)$ respektive $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$). Normen $\|\vec{u}\| = |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ av en vektor. Enhetsvektorer.
- Skalärprodukt: Geometriskt; $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$. Uttryckt i ON-koordinater; $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. $\|\mathbf{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.
- Ortogonala projektionen $\vec{p}$ av vektorn $\vec{u}$ på vektorn $\vec{f}$ som ges av

$$\vec{p} = \text{proj}_{\vec{f}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{f}}{\vec{f} \cdot \vec{f}}\vec{f}$$

och har egenskapen att $\vec{q} = \vec{u} - \vec{p}$ är vinkelrät mot $\vec{f}$.

- Ortogonala projektionen $\vec{p}$ av $\vec{u}$ på planet $ax + by + cz = 0$, med normalvektorn $\vec{n} = (a, b, c)$, som ges av

$$\vec{p} = \vec{u} - \vec{q}, \quad \text{där} \quad \vec{q} = \text{proj}_{\vec{n}}\vec{u}$$

Vi har här $\vec{u} = \vec{p} + \vec{q}$, där $\vec{p}$ ligger i planet och $\vec{q}$ är vinkelrät mot planet, d.v.s. $\vec{q}$ är parallell med $\vec{n}$. Om vektorerna anges som en kolonnmatriser så gäller $\vec{q} = Q\vec{u}$ och $\vec{p} = P\vec{u}$ där

$$Q = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

- Kryssprodukten av vektorerna $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ med formeln

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Arean av parallelogrammen som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

- Trippelprodukten

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

har värdet $\pm V$, där V är volymen av parallelepipeden som uppspanns av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Tecknet på trippelprodukten visar om trippeln $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ utgör ett höger- eller vänstersystem.

- Ett plan har en ekvation $ax + by + cz + d = 0$ (på **normalform**). Vektorn $\vec{n} = (a, b, c)$ är en normalvektor till planet.
- För att hitta en ekvation (på normalform) för planet genom tre givna punkter $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ kan man gå tillväga på (åtminstone) tre sätt:

- (1) Ansätt planets ekvation $ax + by + cz + d = 0$. Alla tre punkterna skall uppfylla denna ekvation vilket ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{cases}$$

där a, b, c, d är de obekanta.

- (2) De båda vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$ är parallella med planet, vilket medför att $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (a, b, c)$ är en normal till planet. Planet har därför ekvationen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

(ty för en godtycklig punkt $P(x, y, z)$ i planet är vektorn $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ vinkelrät mot (a, b, c)).

- (3) För en godtycklig punkt $P(x, y, z)$ i planet är vektorerna $\mathbf{w} = \overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$ parallella med planet. Volymen av den parallelepiped som spänns upp av de tre vektorerna är därför 0, vilket ger oss ekvationen

$$0 = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}$$

som vi kallar för planets ekvation på determinantform.

- Avståndet D från en punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ till planet $ax + by + cz + d = 0$ är

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Se THEOREM 3.5.2.

- Avståndet D mellan två parallella plan $ax + by + cz + d_1 = 0$ och $ax + by + cz + d_2 = 0$ ges av

$$D = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Se exempel 9, sid 162.

- En rät linje genom punkten $P_0(x_0, y_0, z_0)$ parallell med vektorn $\mathbf{v} = (a, b, c)$ har ekvationen $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$, $-\infty < t < \infty$. Sätter vi $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ (ortsvektorerna till punkterna) blir detta $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$.
- Avståndet D mellan två linjer $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{v}_2$, som ej är parallella, är lika med avståndet mellan de två parallella planen $ax + by + cz + d_1 = 0$ och $ax + by + cz + d_2 = 0$, där $(a, b, c) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, som innehåller punkterna $P_1(x_1, y_1, z_1)$ respektive $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Det innebär, enligt ovan, att

$$D = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}.$$

- Ibland anges en rät linje som skärningen mellan två plan $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ och $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Det kan ofta vara lämpligt att uttrycka två av variablerna i den tredje och på så sätt få fram en ekvation för linjen på formen $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Anta, till exempel, att planen har ekvationerna $x + 2y - 2z = 15$ och $2x + y + 2z = 15$. Om vi adderar de båda ekvationerna erhålls $3x + 3y = 30 \Rightarrow x + y = 10$, vilket ger $15 = x + 2y - 2z = x + y + y - 2z = 10 + y - 2z \Rightarrow y = 5 + 2z$, $x = 10 - y = 5 - 2z$. Sätter vi nu $z = t$ får vi $x = 5 - 2t$, $y = 5 + 2t$. Alltså $(x, y, z) = (5, 5, 0) + t(-2, 2, 1)$.

A: avs.3.1, s.130-131: 1(a)-(e), 2(d)(g), 3(e), 6(a)(b), 7, 8, 9, 11, 13,

A: avs.3.2, s.134-135: 1(b)(e), 2(c), 4, 7, 9, 10,

A: avs.3.3, s.142-144: 1-6, 8, 10-21, 24-26,

A: avs.3.4, s.153-155: 1(a)-(c), 2(b), 3(a), 4(a), 10(a), 11(a)(b), 13, 15-18, 19(a),

A: avs.3.5, s.162-165: 2(a), 4(a), 5(a)(c), 6(a)-11(a), 19(b), 22, 24, 32, 35, 39(a), 41(c).

Problem att lösa i gamla tentor/duggor m.m:

Tentan 2009-01-08:	4, 6, 7
Tentan 2008-10-24:	4, 5, 7
Tentan 2008-08-21:	1, 4, 8
Tentan 2008-03-27:	5, 6, 7
Tentan 2008-01-09:	5, 6
Tentan 2007-12-17:	5, 6
Tentan 2007-10-22:	5, 6
Duggan 2008-10-09:	2, 3
Inlupp 2, 2008:	1, 2, 3, 4

Kapitel 4

Handlar om det euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$, linjärt beroende och oberoende, baser, koordinater, linjära avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, egenskaper hos linjära avbildningar, polynom (betraktade som vektorer).

Följande är viktigt:

- $\mathbb{R}^n$ är rummet av alla n -tipplar $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ibland är det lämpligt att se vektorerna som kolonnmatriser, ibland som radmatriser.
- $\mathbb{R}^n$ är försett med skalärprodukten $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$. Vi tolkar $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ som vektorns längd och

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} \right)$$

som vinkeln mellan vektorerna.

- Om $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ är vektorer i $\mathbb{R}^m$ och $x_1, x_2, \dots, x_n$ är reella tal så sägs summan

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$$

vara en **linjärkombination** av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ med **koefficienterna** $x_1, x_2, \dots, x_n$. Om vi bildar matrisen $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ med vektorerna

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

som kolonner och kolonnvektorn $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ så gäller

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \dots + \mathbf{a}_nx_n = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$$

Vektorn $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ är alltså en linjärkombination av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ om och endast om ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart ($x_1, \dots, x_n$ är koefficienterna i de linjärkombinationer av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ som är lika med $\mathbf{b}$).

- Mängden av alla linjärkombinationer av vektorerna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ (i $\mathbb{R}^m$) kallas för **linjära höljet** av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ och betecknas i läroboken med $\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$.

Om $W = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ och $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ så gäller att $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ och $\lambda \mathbf{u} \in W$. Det betyder att W är ett **delrum** till $\mathbb{R}^m$. Vektorerna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ är **linjärt oberoende** om det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ bara har lösningen $\mathbf{x} = \vec{0}$. För att lösa $A\mathbf{x} = \vec{0}$ skriver vi systemet på matrisform $(A \mid \vec{0})$ och gör radoperationer tills vi får en reducerad trappmatris $(C \mid \vec{0})$. Kolonnerna i C är av två slag: Först har vi de så kallade **pivotkolonnerna** $\mathbf{c}_{j_1}, \mathbf{c}_{j_2}, \dots, \mathbf{c}_{j_r}$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$, där

$$\mathbf{c}_{j_1} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{j_2} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{c}_{j_r} = \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektorerna $\mathbf{e}_j$, $j = 1, \dots, m$ med en 1:a på j :te plats och resten nollor kallas för standardbasen i $\mathbb{R}^m$. Pivotkolonnerna utgörs av de r första av dessa vektorer. Det är möjligt att mer än en kolonn i C överensstämmer med $\mathbf{e}_j$, för något j . I så fall är det den av dessa kolonner som ligger längst till vänster, som är pivotkolonnen. För övriga kolonner $\mathbf{c}_k$, $k \notin \{j_1, \dots, j_r\}$ i C gäller att $\mathbf{c}_k$ är en linjärkombination av de pivotkolonner som ligger till vänster om $\mathbf{c}_k$ ($\mathbf{c}_{j_\nu}$ med $j_\nu < k$, se lösta exempel 2 och 3). Det finns alltså tal $x_1, \dots, x_{k-1}$ (där $x_j = 0$ om $\mathbf{c}_j$ ej är pivotkolonn) sådana att $\mathbf{c}_k = \mathbf{c}_1 x_1 + \dots + \mathbf{c}_{k-1} x_{k-1}$. Sätter vi nu $x_k = -1$, $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ så gäller alltså att $C\mathbf{x} = \vec{0}$. Eftersom systemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ har samma lösningar som $C\mathbf{x} = \vec{0}$ följer att $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_1 x_1 + \dots + \mathbf{a}_{k-1} x_{k-1}$.

Pivotkolonnerna i A definieras som kolonnerna på samma platser som pivotkolonnerna i C (om $\mathbf{c}_{j_1}, \mathbf{c}_{j_2}, \dots, \mathbf{c}_{j_r}$ är pivotkolonnerna i C är alltså $\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \dots, \mathbf{a}_{j_r}$ pivotkolonnerna i A). Vårt resonemang ovan visar att varje icke-pivotkolonn $\mathbf{a}_k$ i A kan skrivas som en linjärkombination av pivotkolonnerna i A till vänster om $\mathbf{a}_k$. Koefficienterna i denna linjärkombination är identiska med koefficienterna då $\mathbf{c}_k$ uttrycks som en linjärkombination av pivotkolonnerna i C till vänster om $\mathbf{c}_k$. Å andra sidan kan ingen av pivotkolonnerna $\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \dots, \mathbf{a}_{j_r}$ uttryckas som en linjärkombination av de övriga, d.v.s. pivotkolonnerna i A är linjärt oberoende. Vi säger att $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \dots, \mathbf{a}_{j_r}\}$ är en **bas** i $W = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$. Varje vektor $\mathbf{w} \in W$ kan skrivas som en *unik* linjärkombination

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{a}_{j_1} + \lambda_2 \mathbf{a}_{j_2} + \dots + \lambda_r \mathbf{a}_{j_r}$$

av basvektorerna. Koefficienterna $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ definieras som $\mathbf{w}$:s koordinater i basen $\mathcal{A}$.

Speciellt ser vi att $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ är linjärt oberoende om och endast om alla kolonner i A är pivotkolonner, vilket direkt framgår av att

$$(C \mid \vec{0}) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & \vec{0} \\ \hline O & \vec{0} \end{array} \right)$$

där O är en nollmatris med $m - n$ rader. För att $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ skall kunna vara linjärt oberoende är det alltså nödvändigt (men inte tillräckligt!) att $m \geq n$.

Det linjära höljet av raderna i en matris A kallas för matrisens **radrum**. När man gör elementära radoperationer på en matris ändras inte radrummet. Alltså gäller att radrummet till den med A radekvivalenta reducerade trappmatrisen C är detsamma som A :s radrum.

De nollskilda raderna i C är uppenbart linjärt oberoende och utgör därför en bas i A 's radrum.

- En linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är en funktion $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ med egenskaperna (L1) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ och (L2) $T(\lambda \mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u})$, för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ och alla $\lambda \in \mathbb{R}$.

Standardmatrisen $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ för T är matrisen med kolonnerna $\mathbf{a}_1 = T(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{a}_2 = T(\mathbf{e}_2)$, $\dots$, $\mathbf{a}_n = T(\mathbf{e}_n)$, där $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ är standardbasen i $\mathbb{R}^n$. Av (L1) och (L2) följer att $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Vi koncentrerar oss på de låga dimensionerna (2 och 3) och de geometriska egenskaperna hos sådana avbildningar.

- Rotation moturs vinkeln θ , av vektorerna i planet: Vi har då att $T(\vec{e}_1) = (\cos \theta, \sin \theta)$ och $T(\vec{e}_2) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ ($\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ är standardbasvektorer). För standardmatrisen $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$, till T , gäller alltså att

$$A = AI_2 = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- Projektion, av vektorerna i planet, på vektorn $\mathbf{n} = (a, b)$: Från kapitel 3 (se ovan) vet vi att

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{n} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{v} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \mathbf{v} = A\mathbf{v},$$

där

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

- Projektion, av vektorerna i planet, på den räta linjen $ax + by = 0$. Vektorn $(b, -a)$ är parallell med linjen så vi får direkt av (*) att $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, där

$$A = \frac{1}{b^2 + a^2} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}$$

- Spegling, av vektorerna i planet, i den räta linjen $ax + by = 0$: För en vektor $\mathbf{u}$ som är parallell med linjen gäller att $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ och för en vektor $\mathbf{v}$ som är vinkelrät mot linjen gäller att $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$. Exempelvis har vi $T(b, -a) = (b, -a)$ och $T(a, b) = (-a, -b)$. För standardmatrisen $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$, till T , gäller därför att

$$A \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b & -a \\ -a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

- Projektion, av vektorerna i rummet, på vektorn $\mathbf{n} = (a, b, c)$: Som i (*) får vi $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, där

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \quad (\#)$$

- Projektion, av vektorerna i rummet, på planet $ax + by + cz = 0$: Vi har här att $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - Q\mathbf{v} = (I - Q)\mathbf{v}$, där Q är matrisen för projektionen, av vektorerna i rummet, på vektorn $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (som ges av (#)). Alltså

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \left\{ \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \quad (**)$$

- Spegling, av vektorerna i rummet, i planet $ax + by + cz = 0$: Här gäller att $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2Q\mathbf{v} = (I - 2Q)\mathbf{v}$, där Q är matrisen för projektionen på vektorn $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (som ges av (#)). Alltså

$$A = I - 2Q = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 - a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2 + c^2 - b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & a^2 + b^2 - c^2 \end{pmatrix}$$

- Om Q är matrisen (#) för projektionen på vektorn $\mathbf{n} = (a, b, c)$, P är matrisen (**) för projektionen på planet $ax + by + cz = 0$ och S är matrisen för speglingen i planet $ax + by + cz = 0$ så gäller sambanden $Q^T = Q = Q^2$, $P^T = P = P^2$, $P + Q = I$, $PQ = QP = 0$ (nollmatris), $S^T = S = S^{-1}$ (d.v.s. $S^2 = I$) samt $S = 2P - I = I - 2Q$.

A: avs.4.1, s.178-180: 3, 4, 6(a)-(c), 10, 14(e)(f), 15, 16, 17,(d), 19-23, 26,

A: avs.4.2, s.193-197: 1(b)(c)(d), 5, 6, 12(a)(b), 13(b), 16, 18, 20,

A: avs.4.3, s.206-209: 1, 2, 4, 5(a)(b), 6(a)(b), 7, 8, 13, 14(b)(c), 15, 16, 18, 20, 22, 23,

A: avs.4.4, s.217-219: 1-5, 8, 9, 12, 16.

Problem att lösa i gamla tentor/duggor m.m:

Tentan 2009-01-08:	8
Tentan 2008-10-24:	8
Tentan 2008-08-21:	6, 7
Tentan 2008-03-27:	7
Tentan 2008-01-09:	7, 8
Tentan 2007-12-17:	7
Tentan 2007-10-22:	7, 8
Valentinas uppgifter:	1 - 34

Blandade övningar i Linjär Algebra: linjärt oberoende, linjärt hölje, bas.

1. Låt $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -3, 1)$, $\vec{u}_3 = (-1, -2, 3, 1)$, $\vec{u}_4 = (-1, 0, 2, 1)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^4$.

(a) Avgör om vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ är linjärt beroende eller oberoende.

(b) Avgör om vektorerna $\vec{v} = (1, 3, -1, 4)$ och $\vec{w} = (2, -1, 1, 2)$ tillhör det linjära höljet $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$. Om vektorn $\vec{v}$ resp. $\vec{w}$ tillhör det linjära höljet, framställ den som en linjärkombination av vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$.

2. För vilka värden av konstanten $a \in \mathbb{R}$ tillhör vektorn $\vec{v} = (1, a, 4, 1 - a)$ det linjära höljet av vektorerna $\vec{u}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -2, 1)$ och $\vec{u}_3 = (-1, 3, 1, 1)$ i $\mathbb{R}^4$?

3. Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -2, 0)$ i $\mathbb{R}^3$ är linjärt beroende eller oberoende. I fall de inte är det, finn bland $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ en uppsättning vektorer som är linjärt oberoende och som spänner samma linjära hölje som $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

4. Visa att vektorerna $\vec{v}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, -1, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{v}_4 = (2, 1, 1, 3)$ är linjärt beroende. Uttryck en av de som en linjär kombination av de övriga. Finn bland dem en uppsättning av **linjärt oberoende** vektorer som har samma linjära hölje som vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$.

5. Låt $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 0, 1)$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^3$. Finn en ekvation som komponenterna x_1, x_2, x_3 måste uppfylla för att vektorn $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ skall tillhöra det linjära höljet $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. Tolka resultatet geometriskt. För vektorer $\vec{v}$ som uppfyller ekvationen finn en framställning av $\vec{v}$ som en linjärkombination av $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$.

6. (a) Avgör om vektorerna $\vec{v}_1 = (1, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, -1)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas $\underline{v}$ för vektorn $\vec{F} = (1, 1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1, x_2)$.

(b) Använd resultaten i del (a) för att dela upp kraftvektorn $\vec{F} = (1, 1)$ i $\mathbb{R}^2$ i komponenter parallella med vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ (dvs. finn $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ sådana att $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ med $\vec{F}_1 \parallel \vec{v}_1$ och $\vec{F}_2 \parallel \vec{v}_2$).

7. (a) Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, 2)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas $\underline{u}$ för vektorn $\vec{F} = (1, 1, 1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3)$.

(b) Vektorerna $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, 2)$ spänner upp ett plan π genom origo i $\mathbb{R}^3$. Använd resultaten i del (a) av uppgiften för att framställa kraftvektorn $\vec{F} = (1, 1, 1)$ som summa av två komponenter $\vec{F}_1$ och $\vec{F}_2$, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, där komponenten $\vec{F}_1$ är parallell med vektorn $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$ och komponenten $\vec{F}_2$ är parallell med planet π .

8. Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -1, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, 1, 1)$, $\vec{u}_4 = (2, -1, 3, 3)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas $\underline{u}$ för vektorn $\vec{F} = (1, 1, 2, 1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Facit:

1. (a) Vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ är linjärt beroende.

(b) $\vec{v} \in \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$, $\vec{v} = (-\frac{2}{3})\vec{u}_1 + \frac{7}{3}\vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{u}_3 + 3\vec{u}_4$, (t.ex.)

$$\vec{w} \notin \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4).$$

2. $a = 2$.

3. Vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ är linjärt beroende. Vidare är t.ex. $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ och $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ är linjärt oberoende.

4. T.ex. $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4) = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$.

5. Ekvationen är $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Geometrisk tolkning: vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ spänner upp ett plan π genom origo i $\mathbb{R}^3$. Planet π har ekvationen $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Vektorn $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ tillhör det linjära höljet $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ om $\vec{v}$ ligger (= är parallell) i detta plan.

Om $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ med $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ blir $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$ med $c_1 = \frac{1}{2}x_2$, $c_2 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2$.

6. (a) Ja, $\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{F} = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5})_{\underline{\mathbf{v}}}.$$

$$\vec{w} = (x_1, x_2) = (\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2, \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2)_{\underline{\mathbf{v}}}.$$

(b) $\vec{F}_1 = \frac{3}{5}\vec{v}_1 = \frac{3}{5}(1, 2)$ och $\vec{F}_2 = \frac{1}{5}\vec{v}_2 = \frac{1}{5}(2, -1)$.

7. (a) Ja, $\underline{\mathbf{u}} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{F} = (-2, 1, 1)_{\underline{\mathbf{u}}}.$$

$$\vec{w} = (\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - x_3, \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3)_{\underline{\mathbf{u}}}.$$

(b) $\vec{F}_1 = -2\vec{u}_1 = (-2, 2, -2)$ och $\vec{F}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (3, -1, 3)$.

8. Ja, $\underline{\mathbf{u}} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$,

$$\vec{F} = (5, -1, -1, -1)_{\underline{\mathbf{u}}},$$

$$\vec{w} = (2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4, -x_3 + x_4, x_1 - x_2 - x_4, -x_1 - x_3 + 2x_4)_{\underline{\mathbf{u}}}.$$