Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Prov i matematik
Linj. alg. o geom. 1
2011-05-07

Svar till tentan.

Del A

1. För vilka värden på a är ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + (a-1)y = 2a \end{cases}$$

lösbart?

Svar. Koefficientmatrisen har determinanten

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix} = a^2 - a - 2 = (a+1)(a-2)$$

Om $a \neq -1, 2$ är determinanten nollskild, vilket medför att systemet är entydigt lösbart för varje högerled. Om $a = -1$ blir ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases} \sim -x + y = 1.$$

I detta fall har vi alltså oändligt många lösningar. Om, slutligen, $a = 2$ blir systemet

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Subtraherar vi den första ekvationen från den andra så får vi den orimliga ekvationen $0 = 3$. Systemet saknar därför lösningar i detta fall. □

2. Bestäm, när den existerar, inversen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Svar. I problem 1 såg vi att $\det(A) = a^2 - a - 2 = (a+1)(a-2)$. Matrisen är alltså inverterbar om och endast om $a \neq -1, 2$. Enligt en bekant formel ges inversen av

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 - a - 2}\begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ -2 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2 + a - a^2}\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 2 & -a \end{pmatrix}$$

Alternativt får vi inversen genom att lösa matrisekvationen $AX = I$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 1 & 0 \\ 2 & a-1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2a & 2 & 2 & 0 \\ 2 & a-1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2+a-a^2 & 2 & -a \\ 2 & a-1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2+a-a^2 & 2 & -a \\ 2(2+a-a^2) & (a-1)(2+a-a^2) & 0 & 2+a-a^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2+a-a^2 & 2 & -a \\ 2(2+a-a^2) & 0 & 2(1-a) & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2+a-a^2 & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 2+a-a^2 & 2 & -a \end{array}\right)$$

Den sista matrisen ger

$$A^{-1} = \frac{1}{2+a-a^2}\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 2 & -a \end{pmatrix}$$

□

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Svar. Med hjälp av determinanträknereglerna får vi

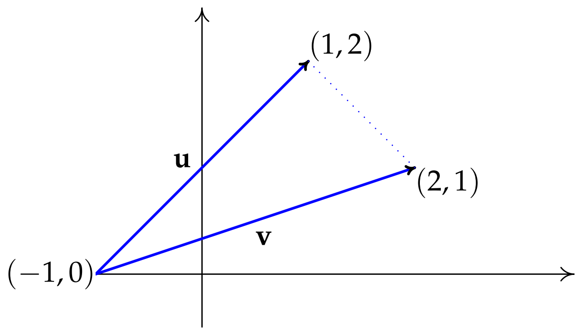
$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & x \\ 0 & x & 1 \\ x-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (1-x)(x)(x+1)$$

Ekvationen har därför rötterna $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$. □

4. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(-1, 0)$, $(1, 2)$ och $(2, 1)$.

Svar. Vektorn från $(-1, 0)$ till $(1, 2)$ är $\mathbf{u} = (2, 2)^T$. Vektorn från $(-1, 0)$ till $(2, 1)$ är $\mathbf{v} = (3, 1)^T$.



Arean av triangeln är hälften av arean av parallellogrammen som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Vi har

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4,$$

vilket ger oss arean $\frac{1}{2}|\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})| = 2$. □

5. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(0, -1, 0)$, $(1, 1, 2)$ och $(1, 2, 3)$.

Svar. Vektorn från $(0,-1,0)$ till $(1,1,2)$ är $\mathbf{u} = (1,2,2)^T$. Vektorn från $(0,-1,0)$ till $(1,2,3)$ är $\mathbf{v} = (1,3,3)^T$. Arean av triangeln är hälften av arean av parallellogrammen som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Vi har

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

vilket ger oss arean $\frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. □

6. Låt L vara linjen med ekvationen $x + 2y = 0$. Skriv vektorn $\mathbf{w} = -4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med L och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot L.

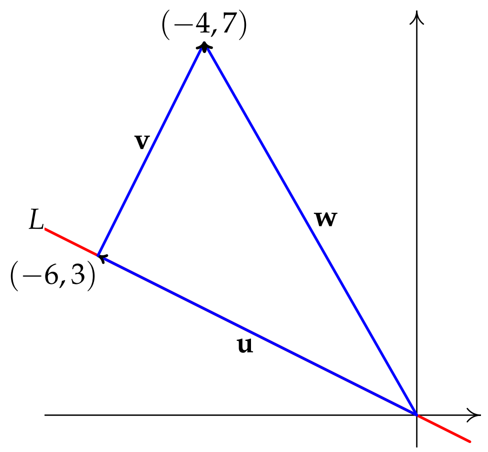
Svar. En vektor parallell med L är $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Vi har då

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a} = \frac{-8-7}{4+1}\,\mathbf{a} = -3\,\mathbf{a} = -6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

och

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{u} = (-4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) - (-6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

En kontroll, som man bör göra, visar att $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$.



□

7. Låt L vara linjen i föregående uppgift. Bestäm avståndet från punkten $(-4,7)$ till L.

Svar. Det sökta avståndet är lika med $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{5}$, där $\mathbf{v}$ är vektorn i föregående problem. Alternativt ges avståndet av

$$\frac{|(-4) + 2(7)|}{\sqrt{1+4}} = 2\sqrt{5}.$$

□

8. Låt Π vara planet med ekvationen $x + y - z = 0$. Bestäm avståndet från punkten $(2,2,1)$ till Π.

Svar. Avståndet ges av

$$\frac{|(2)+(2)-(1)|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$\square$

9. Π är planet i föregående uppgift. Vilken punkt på Π ligger närmast punkten $(2,2,1)$?

Svar. Räta linjen genom punkten $(2,2,1)$ som går vinkelrätt mot planet $x+y-z=0$ har ekvationen

$$(x,y,z) = (2,2,1) + t(1,1,-1) = (2+t, 2+t, 1-t)$$

Linjen skär planet i punkten som ges av

$$0 = (2+t) + (2+t) - (1-t) = 3+3t \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

Den sökta punkten ges därför av

$$(x,y,z) = (2-1, 2-1, 1+1) = (1,1,2)$$

$\square$

10. Bestäm elementära matriser E_1, E_2, E_3 sådana att

$$E_3E_2E_1A = I \quad \text{där} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Svar. Vi påminner om att en elementär matris erhålls genom att man gör **en** radoperation på enhetsmatrisen. Om matrisen A_1 fås genom en radoperation på A så gäller $A_1 = E_1A$, där E_1 är en elementär matris. Vi har i detta fall

$$E_1A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = A_1$$

$$E_2A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2$$

$$E_3A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

där

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Av detta följer genast att $E_3E_2E_1A = I$ (vilket, för övrigt, innebär att $A^{-1} = E_3E_2E_1$). $\square$

11. Bestäm en ekvation för planet, genom origo, som innehåller linjen $x-1 = y = z$.

Svar. Varje plan genom origo har en ekvation av typen $0 = Ax + By + Cz$. Alla punkter $(x, x-1, x-1),\ x \in \mathbb{R}$ ligger i planet, vilket ger oss

$$0 = Ax + B(x-1) + C(x-1) = (A+B+C)\,x - (B+C)$$

Detta gäller för alla $x \in \mathbb{R}$ om och endast om $0 = A+B+C = B+C$, vilket ger $A = 0$ och $C = -B$, där B är ett godtyckligt nollskilt tal. Väljer vi $B = 1$ så får vi ekvationen $0 = y - z$, för planet. $\square$

12. Bestäm en ekvation för planet genom punkterna $(-1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,-1)$.

Svar. Varje plan har en ekvation av typen $Ax + By + Cz = D$. Då alla tre punkterna $(-1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,-1)$ ska uppfylla ekvationen får vi

$$\begin{array}{lcl} D = -A & \Longrightarrow & A = -D \\ D = B & \Longrightarrow & B = D \\ D = -C & \Longrightarrow & C = -D \end{array}$$

där D är ett godtyckligt nollskilt tal. Med $D = -1$ får vi ekvationen $x - y + z + 1 = 0$, för planet. □

Del B

13. (a) Visa att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

är inverterbar och bestäm inversen A^{-1}.

(b) Lös matrisekvationen

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Svar. (a) Vi löser matrisekvationen $AX = I$ (skriven på formen $(A \mid I)$):

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & 6 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & 6 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Av den sista matrisen framgår att

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom vi fann inversen är naturligtvis A inverterbar.

(b) Matrisekvationen är av formen $XA = B$ och har därför (den entydiga) lösningen $X = BA^{-1}$, alltså

$$X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

14. Låt L_1 vara skärningslinjen mellan planen $x + z = 1$ och $y - z = -2$. Låt L_2 vara skärningslinjen mellan planen $x + y = 3$ och $y + z = 2$. Bestäm avståndet mellan L_1 och L_2.

Svar. L_1 beskrivs av ekvationerna $1 - x = y + 2 = z$. En punkt på L_1 är $(1, -2, 0)$ och en vektor parallell med L_1 är $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1)$. L_2 beskrivs av ekvationerna $3 - x = y = 2 - z$. En punkt på L_2 är $(3, 0, 2)$ och en vektor parallell med L_2 är $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)$. En vektor som är vinkelrät mot båda linjerna är

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

En annan vektor som är vinkelrät mot båda linjerna är $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Vektorn från $(1, -2, 0)$ till $(3, 0, 2)$ är $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Avståndet mellan L_1 och L_2 ges av

$$\frac{|\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

□

15. Π är planet med ekvationen $x - y - z = 1$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$, där $A = (1, 0, 3)$, $B = (2, 1, 0)$. Skriv vektorn $\mathbf{w}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med Π och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot Π.

Svar. En normal till planet är $\mathbf{n} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ och $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Det är klart att $\mathbf{v}$ är projektionen av $\mathbf{w}$ längs $\mathbf{n}$, alltså

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} = \tfrac{3}{3} \mathbf{n} = \mathbf{n} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Vi får sedan

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) - (\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Även denna gång bör vi kontrollera att $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Vi har

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 - 2 + 2 = 0.$$

□

16. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning T som geometriskt kan beskrivas som speglingen i planet $x - y - 2z = 0$. Bestäm alla vektorer $\mathbf{v}$ sådana att $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$.

Svar. En normalvektor till planet är $\mathbf{n} = (1, -1, -2)^t$. Standardmatrisen för den ortogonala projektionen längs $\mathbf{n}$ är därför

$$Q = \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^t}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} (1, \ -1, \ -2) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Standardmatrisen S, för T, fås nu som

$$S = I - 2Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

För säkerhets skull kontrollerar vi att $S^2 = I$:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

$T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ om och endast om $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot planet. Vektorn $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot planet om och endast om den är parallell med $\mathbf{n}$, alltså om och endast om $\mathbf{v} = t(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ för något tal t. $\square$