Uppsala Universitet
**Matematiska Institutionen**
Bo Styf

Övningstenta
Linj. alg. o geom. 1
distans, 2011-04

*Tentamenstid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. För betyget 3 krävs 18 poäng (av 24) på del A. För betyget 4 krävs 18 poäng på del A och 25 poäng totalt. För betyget 5 krävs 18 poäng på del A och 32 poäng totalt.*

## Del A

**1.** För vilka värden på $a$ är ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

lösbart? (2)

**2.** Bestäm, när den existerar, inversen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$ (2)

**3.** Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$ (2)

**4.** Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(0,1)$, $(3,2)$ och $(2,3)$. (2)

**5.** Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(0,1,1)$, $(1,3,2)$ och $(1,2,3)$. (2)

**6.** Låt $L$ vara linjen med ekvationen $x + y = 0$. Skriv vektorn $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med $L$ och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot $L$. (2)

**7.** Låt $L$ vara linjen i föregående uppgift. Bestäm avståndet från punkten $(3,1)$ till $L$. (2)

**8.** Låt $\Pi$ vara planet med ekvationen $x + 2y - 2z = 0$. Bestäm avståndet från punkten $(1,2,1)$ till $\Pi$. (2)

**9.** $\Pi$ är planet i föregående uppgift. Vilken punkt på $\Pi$ ligger närmast punkten $(1,2,1)$? (2)

**10.** Bestäm elementära matriser $E_1$, $E_2$, $E_3$ sådana att

$$E_3E_2E_1A = I \quad \text{där} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$ (2)

**11.** Två linjer ges av $L_1 : (x,y,z) = (3-2t, 5-t, t)$, $L_2 : (x,y,z) = (t, 2-t, 2)$. Visa att linjerna skär varandra och bestäm skärningspunkten. (2)

**12.** Låt $L_1, L_2$ vara linjerna i föregående uppgift. Bestäm en ekvation för planet som innehåller båda linjerna. (2)

# Del B

**13.** Bestäm alla högerinverser till matrisen $A$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Du ska alltså lösa matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

**14.** Låt $L_1$ vara skärningslinjen mellan planen $x + y = 1$ och $y - z = 2$. Låt $L_2$ vara skärningslinjen mellan planen $x - y = 3$ och $y + z = -1$. Bestäm avståndet mellan $L_1$ och $L_2$. (4)

**15.** $\Pi$ är planet med ekvationen $x + y - z = 1$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$, där $A = (1, 1, 3)$, $B = (2, 1, 0)$. Skriv vektorn $\mathbf{w}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med $\Pi$ och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot $\Pi$. (4)

**16.** Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $T$ som geometriskt kan beskrivas som den ortogonala projektionen på planet $x + y - 2z = 0$. Bestäm alla vektorer $\mathbf{v}$ sådana att $T(\mathbf{v}) = \vec{0}$. (4)