Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Övningstenta
Linj. alg. o geom. 1
distans, 2011-04

Svar till övningstentan.

Del A

1. För vilka värden på a är ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

lösbart?

Svar. Koefficientmatrisen har determinanten

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$$

Om $a \neq \pm 1$ är determinanten nollskild, vilket medför att systemet är entydigt lösbart för varje högerled. Om $a = 1$ blir ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \sim x + y = 1.$$

I detta fall har vi alltså oändligt många lösningar. Om, slutligen, $a = -1$ blir systemet

$$\begin{cases} -x + y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases} \sim x - y = 1.$$

Även här har vi oändligt många lösningar. Systemet är därför alltid lösbart! $\square$

2. Bestäm, när den existerar, inversen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Svar. I problem 1 såg vi att $\det(A) = a^2 - 1$. Matrisen är alltså inverterbar om och endast om $a \neq \pm 1$. Enligt en bekant formel ges inversen av

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{1-a^2}\begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

Alternativt får vi inversen genom att lösa matrisekvationen $AX = I$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1-a^2 & 1 & -a \\ 1 & a & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1-a^2 & 1 & -a \\ 1-a^2 & a(1-a^2) & 0 & 1-a^2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1-a^2 & 1 & -a \\ 1-a^2 & 0 & -a & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1-a^2 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1 & -a \end{array} \right)$$

Den sista matrisen ger

$$A^{-1} = \frac{1}{1-a^2} \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

□

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Svar. Determinanträkneregelerna ger oss

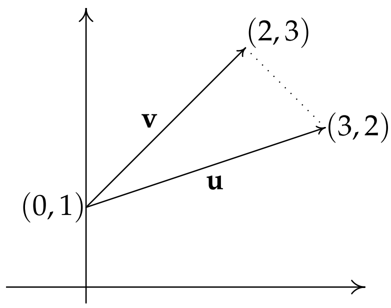
$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & x \\ x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(x+2)(x-1)^2$$

Ekvationen har därför rötterna $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -2$. □

4. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(0, 1)$, $(3, 2)$ och $(2, 3)$.

Svar. Vektorn från $(0, 1)$ till $(3, 2)$ är $\mathbf{u} = (3, 1)^T$. Vektorn från $(0, 1)$ till $(2, 3)$ är $\mathbf{v} = (2, 2)^T$.



Arean av triangeln är hälften av arean av parallellogrammen som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Vi har

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4,$$

vilket ger oss arean $\frac{1}{2}|\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})| = 2$. □

5. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(0, 1, 1)$, $(1, 3, 2)$ och $(1, 2, 3)$.

Svar. Vektorn från $(0,1,1)$ till $(1,3,2)$ är $\mathbf{u} = (1,2,1)^T$. Vektorn från $(0,1,1)$ till $(1,2,3)$ är $\mathbf{v} = (1,1,2)^T$. Arean av triangeln är hälften av arean av parallellogrammen som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Vi har

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

vilket ger oss arean $\frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{11}$. □

6. Låt L vara linjen med ekvationen $x + y = 0$. Skriv vektorn $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med L och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot L.

Svar. En vektor parallell med L är $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Vi har då

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\,\mathbf{a} = \frac{3-1}{1+1}\,\mathbf{a} = \mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$$

och

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{u} = (3\mathbf{i} + \mathbf{j}) - (\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

En kontroll, som man bör göra, visar att $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$. □

7. Låt L vara linjen i föregående uppgift. Bestäm avståndet från punkten $(3,1)$ till L.

Svar. Det sökta avståndet är lika med $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{2}$, där $\mathbf{v}$ är vektorn i föregående problem. Alternativt ges avståndet av

$$\frac{|(2) + (2)|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}.$$

□

8. Låt Π vara planet med ekvationen $x + 2y - 2z = 0$. Bestäm avståndet från punkten $(1,2,1)$ till Π.

Svar. Avståndet ges av

$$\frac{|(1) + 2(2) - 2(1)|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|3|}{3} = 1.$$

□

9. Π är planet i föregående uppgift. Vilken punkt på Π ligger närmast punkten $(1,2,1)$?

Svar. Räta linjen genom punkten $(1,2,1)$ som går vinkelrätt mot planet $x + 2y - 2z = 0$ har ekvationen

$$(x,y,z) = (1,2,1) + t(1,2,-2) = (1+t, 2+2t, 1-2t)$$

Linjen skär planet i punkten som ges av

$$0 = (1+t) + 2(2+2t) - 2(1-2t) = 3 + 9t \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{3}$$

Den sökta punkten ges därför av

$$(x,y,z) = (1 - \tfrac{1}{3}, 2 - \tfrac{2}{3}, 1 + \tfrac{2}{3}) = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3})$$

□

10. Bestäm elementära matriser E_1, E_2, E_3 sådana att

$$E_3E_2E_1A = I \quad \text{där} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

Svar. Vi påminner om att en elementär matris erhålls genom att man gör **en** radoperation på enhetsmatrisen. Om matrisen A_1 fås genom en radoperation på A så gäller $A_1 = E_1A$, där E_1 är en elementär matris. Vi har i detta fall

$$E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A_1$$

$$E_2A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2$$

$$E_3A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

där

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Av $(*)$ följer att $A^{-1} = E_3E_2E_1$, vilket lätt kontrolleras. □

11. Två linjer ges av $L_1 : (x, y, z) = (3 - 2t, 5 - t, t)$, $L_2 : (x, y, z) = (t, 2 - t, 2)$. Visa att linjerna skär varandra och bestäm skärningspunkten.

Svar. Linjerna skär varandra om och endast om det finns tal t_1, t_2 sådana att

$$\begin{aligned} 3 - 2t_1 &= t_2 \\ 5 - t_1 &= 2 - t_2 \\ t_1 &= 2 \end{aligned}$$

Sätter vi in $t_1 = 2$ i den första ekvationen får vi $-1 = t_2$. Sätter vi sedan in $t_1 = 2$ och $t_2 = -1$ i den andra ekvationen så får vi $3 = 3$, vilket uppenbarligen är sant. Skärningspunkten är $(t_2, 2 - t_2, 2) = (-1, 3, 2)$. □

12. Låt L_1, L_2 vara linjerna i föregående uppgift. Bestäm en ekvation för planet som innehåller båda linjerna.

Svar. En punkt på L_1 är $(3, 5, 0)$. En punkt på L_2 är $(0, 2, 2)$. Vektorn från $(-1, 3, 2)$ till $(3, 5, 0)$ är $\mathbf{v}_1 = (4, 2, -2)^T$. Vektorn från $(-1, 3, 2)$ till $(0, 2, 2)$ är $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0)^T$. Det sökta planet går genom punkten $(-1, 3, 2)$ och är parallellt med $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. En ekvation för planet är därför

$$0 = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 4 \\ y-3 & -1 & 2 \\ z-2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2(x + y + 3z - 8)$$

En lite enklare ekvation är $x + y + 3z = 8$. Alla tre punkterna, $(3, 5, 0)$, $(0, 2, 2)$ och $(-1, 3, 2)$, ska uppfylla denna ekvation, vilket lätt kontrolleras. □

Del B

13. Bestäm alla högerinverser till matrisen A, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Du ska alltså lösa matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Svar. Matrisekvationen kan skrivas som

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Den högra matrisen svarar mot de båda ekvationssystemen

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_{11} & + & 2x_{21} & & & = & 2 \\ & & & & x_{31} & = & -1 \end{array} \right. \quad \text{och} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_{12} & + & 2x_{22} & & & = & -1 \\ & & & & x_{32} & = & 1 \end{array} \right.$$

I det första systemet kan x_{21} ges ett godtyckligt värde, säg $x_{21} = t_1$, vilket ger $x_{11} = 2 - 2t_1$, $x_{31} = -1$. I det andra systemet kan på samma sätt x_{22} ges ett godtyckligt värde, säg $x_{22} = t_2$, vilket ger $x_{12} = -1 - 2t_2$, $x_{32} = 1$. Högerinverserna till A har alltså formen

$$\begin{pmatrix} 2 - 2t_1 & -1 - 2t_2 \\ t_1 & t_2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

där $t_1,\ t_2$ är godtyckliga reella tal. □

14. Låt L_1 vara skärningslinjen mellan planen $x + y = 1$ och $y - z = 2$. Låt L_2 vara skärningslinjen mellan planen $x - y = 3$ och $y + z = -1$. Bestäm avståndet mellan L_1 och L_2.

Svar. L_1 beskrivs av ekvationerna $1 - x = y = 2 + z$. En punkt på L_1 är $(1, 0, -2)$ och en vektor parallell med L_1 är $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1)$. L_2 beskrivs av ekvationerna $x - 3 = y = -z - 1$. En punkt på L_2 är $(3, 0, -1)$ och en vektor parallell med L_2 är $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -1)$. En vektor som är vinkelrät mot båda linjerna är

$$\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$$

En annan vektor som är vinkelrät mot båda linjerna är $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$. Vektorn från $(1, 0, -2)$ till $(3, 0, -1)$ är $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$. Avståndet mellan L_1 och L_2 ges av

$$\frac{|\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

□

15. Π är planet med ekvationen $x + y - z = 1$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$, där $A = (1, 1, 3)$, $B = (2, 1, 0)$. Skriv vektorn $\mathbf{w}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med Π och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot Π.

Svar. En normal till planet är $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ och $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 3\mathbf{k}$. Det är klart att $\mathbf{v}$ är projektionen av $\mathbf{w}$ längs $\mathbf{n}$, alltså

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n} = \tfrac{4}{3}\mathbf{n} = \tfrac{4}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

Vi får sedan

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = \tfrac{1}{3}(3\mathbf{i} - 9\mathbf{k}) + \tfrac{1}{3}(-4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \tfrac{1}{3}(-\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}).$$

Även denna gång bör vi kontrollera att $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Vi har

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \tfrac{4}{9}(-1 - 4 + 5) = 0.$$

□

16. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning T som geometriskt kan beskrivas som den ortogonala projektionen på planet $x + y - 2z = 0$. Bestäm alla vektorer $\mathbf{v}$ sådana att $T(\mathbf{v}) = \vec{0}$.

Svar. En normalvektor till planet är $\mathbf{n} = (1, 1, -2)^t$. Standardmatrisen för den ortogonala projektionen längs $\mathbf{n}$ är därför

$$Q = \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^t}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}(1,\ 1,\ -2) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Standardmatrisen P, för T, fås nu som

$$P = I - Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

För säkerhets skull kontrollerar vi att $P^2 = P$:

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 30 & -6 & 12 \\ -6 & 30 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} = P \end{aligned}$$

$T(\mathbf{v}) = \vec{0}$, dvs $\mathbf{v}$ projiceras på nollvektorn, om och endast om $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot planet. Vektorn $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot planet om och endast om den är parallell med $\mathbf{n}$, alltså om och endast om $\mathbf{v} = t(1, 1, -2)^t$ för något tal t. □