UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Styf, Aspenberg

Prov i matematik
Lärare m.fl.
Linjär algebra o geometri 1
2012-03-09

Skrivtid: 8.00–13.00 . Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Varje uppgift är värd 5 poäng. Lösningarna skall vara försedda med förklarande text. Skriv läsbart!

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -x_1 & & & + & 5\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & - & 4\,x_3 & - & 4\,x_4 & = & 2 \\ -3\,x_1 & - & x_2 & + & 10\,x_3 & + & x_4 & = & 3. \end{array}$$

2. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & x & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \\ x & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

inverterbar?

3. Bestäm alla matriser X sådana att

$$AX = B$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Låt $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 3, 4)$ och $C = (-1, 1, 1)$ vara tre punkter i rymden. Bestäm arean av triangeln med hörn i dessa tre punkter.

5. Planet Π skär koordinataxlarna i punkterna $(6, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ och $(0, 0, 2)$. Bestäm punkten N, på Π, som ligger närmast origo.

6. Låt $A = (2, -1, 0)$ och $B = (-2, 2, 2)$. Linjen L går genom origo och är parallell med vektorn $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^T$. Bestäm alla punkter C på linjen L, sådana att triangeln ABC blir rätvinklig vid C.

7. Linjen L, genom punkterna $(2,0,1)$ och $(0,1,-2)$, har spegelbilden L' i planet

$$x - y + z = 0.$$

Finn en ekvation på parameterform för L'.

8. Låt $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$. En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras genom

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{n} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

Bestäm f:s matris. Bestäm även alla vektorer $\mathbf{v}$ för vilka $\|f(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$.