UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Styf

Exempeltenta med lösningar
Programmen
EI, IT, K, X
Linjär algebra
juni 2004

Skrivtid: Fem timmar. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp 32 poäng. Påbörja varje uppgift på nytt papper och skriv endast på papperets ena sida.

1. Delrummet $\mathbf{M}$ till $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna $(2, 1, -3, 2)$, $(1, 1, -2, 1)$, $(-1, 0, 1, -1)$ och $(-4, -2, 6, -4)$. Bestäm en bas i $\mathbf{M}$ bland dessa vektorer och bestäm även $a \in \mathbb{R}$ så att vektorn $u = (-8, -5, a, -8)$ tillhör $\mathbf{M}$. Ange för ett sådant a-värde koordinaterna för u i den valda basen.

2. Låt $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vara en bas i det linjära rummet $\mathbf{L}$. Visa att

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

är en ny bas. Ange koordinaterna för $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ i den nya basen.

3. Betrakta delrummet $\mathbf{M} = \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$, till $\mathbb{E}^4$ ($\mathbb{E}^4$ är som bekant $\mathbb{R}^4$ försett med standardskalärprodukten). Bestäm en ON-bas i det ortogonala komplementet $\mathbf{M}^\perp$, till $\mathbf{M}$. Skriv vektorn $\mathbf{w} = (-2, 5, 1, 0)$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} \in \mathbf{M}$ och $\mathbf{v} \in \mathbf{M}^\perp$.

4. Bestäm standardmatrisen för den linjära operatorn F på $\mathbb{E}^3$ som geometriskt kan beskrivas som en ortogonal projektion på planet $x + z = 0$.

5. Visa att

$$-x^2 - y^2 - z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 1$$

är ekvationen för en rotationsyta i $\mathbb{E}^3$. Bestäm ytans typ, rotationsaxeln samt det minsta avståndet från ytan till origo. Rita figur!

6. Den linjära operatorn F på $\mathbb{R}^3$ har i någon bas matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 2 & 2-a \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Bestäm alla värden på $a \in \mathbb{R}$ för vilka operatorn är diagonaliserbar. Ange, i varje sådant fall, en bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till F.

7. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$, där $\mathbb{M}_{2\times 2}$ betecknar rummet av alla reella 2×2-matriser, definieras genom

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (c, a-d, b)$$

(a) Bestäm matrisen för F med avseende på baserna

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i $\mathbb{M}_{2\times 2}$ och standardbasen i $\mathbb{R}^3$.
(b) Bestäm baser i F:s noll- och värderum.

8. F är en linjär operator på det ändlig-dimensionella linjära rummet $\mathbf{L}$. Låt $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ vara ett egenvärde till F av multiplicitet $k > 0$ och låt $\mathbf{E}(\lambda_1) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L} : F(\mathbf{u}) = \lambda_1 \mathbf{u}\}$ vara motsvarande egenrum. Låt r beteckna dimensionen av $\mathbf{E}(\lambda_1)$. Visa att $r \leq k$.

(Ledning: Välj en bas i $\mathbf{E}(\lambda_1)$. Enligt sats kan denna bas kompletteras med ytterligare vektorer så att man, sammantaget, får en bas i $\mathbf{L}$. Gör en sådan komplettering, vilken spelar ingen roll, och betrakta matrisen A, för F, i den uppkomna basen. A har samma egenvärden, räknade med multiplicitet, som F.)

Lösningar till tentamen i Linjär algebra juni 2004

Lösning till problem 1. Genom att lägga de fem vektorerna som kolonner i en matris A och göra några radoperationer får vi

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det framgår först att $\dim(\mathbf{M}) = 2$ och att de två första vektorerna utgör en bas i $\mathbf{M}$. För det andra ser vi att den femte vektorn tillhör $\mathbf{M}$ precis då $a = 13$. Koordinaterna för den femte vektorn med avseende på basen i $\mathbf{M}$ är i detta fall $-3,\ -2$.

Lösning till problem 2. Koordinaterna för $\mathbf{u}$ i $\mathbf{f}$-basen ges av $\mathbf{u}_f = T^{-1}\mathbf{u}_e$, där T är transformationsmatrisen från $\mathbf{e}$-basen till $\mathbf{f}$-basen. Detta betyder att $\mathbf{u}_f$ är lösning till ekvationssystemet $T\mathbf{x} = \mathbf{u}_e$. På matrisform får vi, med några radoperationer:

$$[T\,\mathbf{u}_e] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Av den sista matrisen framgår för det första att T är inverterbar (ty den har full rang), vilket medför att $\mathbf{f}$-vektorerna bildar en ny bas. För det andra kan vi (av högerledet) utläsa att $\mathbf{u}_f = (-1, 2, 0)$.

Lösning till problem 3. Vi ser att $\mathbf{M}$ består av alla vektorer som är ortogonala mot de båda vektorerna $\mathbf{f}_3 = (1, 1, 1, -1)$ och $\mathbf{f}_4 = (0, 1, 1, 2)$. Men det betyder att $\mathbf{f}_3$ och $\mathbf{f}_4$ spänner upp $\mathbf{M}^\perp$. Eftersom de råkar vara ortogonala utgör $(1, 1, 1, -1)/2$ och $(0, 1, 1, 2)/\sqrt{6}$ en ON-bas i $\mathbf{M}^\perp$.

Den ortogonala projektionen av $\mathbf{w}$ på $\mathbf{M}^\perp$ ges av

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{f}_3}{\mathbf{f}_3\cdot\mathbf{f}_3}\,\mathbf{f}_3 + \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{f}_4}{\mathbf{f}_4\cdot\mathbf{f}_4}\,\mathbf{f}_4 = (1, 2, 2, 1)$$

Den ortogonala projektionen av $\mathbf{w}$ på $\mathbf{M}$ fås nu som $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = (-3, 3, -1, -1)$.

Lösning till problem 4. Låt $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (0, 1, 0)$ och $f_3 = (1, 0, 1)$. Dessa vektorer utgör en bas i $\mathbb{E}^3$. Eftersom $f_1,\ f_2$ ligger i planet medan f_3 är ortogonal mot planet gäller att $F(f_1) = f_1$, $F(f_2) = f_2$, $F(f_3) = \vec{0}$. Matrisen för F i f-basen är därför diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformationsmatrisen från standardbasen till f-basen och dess invers ges av

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Standardmatrisen fås nu som

$$A = T\,D\,T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning till problem 5. Den kvadratiska formen har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Egenvärdena till A ges av

$$0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 3-\lambda & -1-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda)^2$$

Alltså har vi $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Vi ser av detta att ytan är en tvåmantlad hyperboloid, med ekvationen $3y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2 = 1$ i koordinaterna som svarar mot en ON-bas av egenvektorer till A. Att ytan är en rotationsyta följer av att vi har två sammanfallande egenvärden ($\lambda_2 = \lambda_3$). Rotationsaxeln löper genom origo parallellt med en egenvektor hörande till $\lambda_1 = 3$. Egenvektorerna hörande till $\lambda_{2,3} = -3$ ges av

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d v s de uppfyller ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, vilket betyder att de är ortogonala mot vektorn $(1, 1, 1)$. Men det medför att egenvektorerna hörande till $\lambda_1 = 3$ är de nollskilda vektorerna parallella med $(1, 1, 1)$. Rotationsaxeln är därför också parallell med denna vektor.

Minsta avståndet till origo har de båda vertex-punkterna, som uppfyller ekvationerna $y_2 = y_3 = 0$, $3y_1^2 = 1$. Avståndet från dessa till origo är $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = 1/\sqrt{3}$.

Lösning till problem 6. Egenvärdena ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ a & 2-\lambda & 2-a \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (4-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Vi har alltså $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Egenvektorerna till $\lambda_{2,3} = 1$ ges av det på matrisform skrivna homogena ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Av den sista matrisen ser vi att två linjärt oberoende egenvektorer finns till $\lambda_{2,3} = 1$ om och endast om $a = 0$, i vilket fall de ges av ekvationen $x_2 + 2x_3 = 0$. T ex har vi lösningarna $(1, 0, 0)$ och $(0, -2, 1)$. Egenvektorerna till $\lambda_1 = 4$ fås, då $a = 0$, ur systemet

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vars lösningar uppfyller $x_1 = x_2 = x_3$, t ex $(1, 1, 1)$.

Lösning till problem 7. Vi har

$$F(B_1) = (0,1,0), \quad F(B_2) = (0,0,1), \quad F(B_3) = (1,0,0), \quad F(B_4) = (0,-1,0)$$

Den sökta matrisen är därför

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nollrummet ges av $(0,0,0) = (c, a-d, b) \Leftrightarrow b = c = 0$, $d = a$ så nollrummet har dimension 1 med basen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Värderummet har dimension $4 - 1 = 3$ vilket innebär att det utgör hela $\mathbb{R}^3$.