Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Linjär algebra II, 5 hp
ES, KandFy, Q, X
2009-08-31

Kryssproblem (redovisningsuppgifter).

Att tänka på:

Till var och en av de fem lektionerna hör ett antal (tre eller fyra) problem som du skall försöka lösa. Man kan göra detta individuellt, men bäst är kanske att arbeta i en grupp med tre (möjligen fyra) medlemmar. En grupp med medlemmarna A, B och C kan till exempel göra så att A löser problem 1 medan B och C tar problem 2 respektive problem 3. När man arbetat lagom länge individuellt samlas gruppen. A presenterar sin lösning för B och C. Man diskuterar och gör ändringar tills alla tycker att lösningen är bra. Motsvarande genomgångar görs sedan av B och C. När problemen är nöjaktigt lösta är det dags för B och C att presentera varsin lösning av problem 1. Efter en förutbestämd tid, säg 15 minuter, avbryts lösandet och A initierar och leder en kritisk diskussion av var och en av lösningarna. Proceduren upprepas för problemen 2 och 3 (med B respektive C som diskussionsledare). Kör gruppen fast bör man snarast kontakta en lärare för hjälp.

På detta, eller liknande, sätt blir man ordentligt förberedd att presentera lösningar till kommande lektions kryssproblem. I början av lektionen sätter man ett kryss vid vart och ett av de problem som man är beredd att lösa framme vid tavlan. Läraren tar sedan, med slumpens hjälp, ut en student för varje problem.

En av studenterna ställer sig vid tavlan och löser sin uppgift. Efter en förutbestämd tid, säg 15 minuter, avbryts lösandet och läraren initierar och leder en diskussion av lösningen. Här är det klassens (de som kryssat uppgiften), snarare än studentens vid tavlan, uppgift att komma med förslag till ändringar och tillägg. Målet för diskussionen är förstås att komma fram till en mer eller mindre perfekt lösning.

Proceduren upprepas för de båda återstående uppgifterna.

Observera att alla som har satt ett kryss vid en uppgift får tillgodoräkna sig uppgiften. Av dig som löser ett problem vid tavlan krävs inte att lösningen är fullständig eller korrekt. Det enda som krävs är att det måste vara uppenbart att du har förberett sig väl. Om så inte är fallet har du nog chansat på att slippa bli utvald att lösa uppgiften. Konsekvensen blir att du inte får tillgodoräkna dig något av de problem som du kryssat under den aktuella lektionen eller tidigare lektioner. Du blir alltså helt nollställd!

Om du kryssat minst 50% respektive minst 80% av redovisningsuppgifterna får du 1 respektive 2 bonuspoäng. Dessa kommer att adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen.

Bonuspoängen från kryssuppgifterna tillgodoräknas enbart vid första tentamenstillfället.

Uppgifter till lektion nr 1:

1. Antag att $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ (standardbasen) medan $\mathbf{v}$ har koordinatvektorn $(1, 1, -1)$ med avseende på basen $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, 0, 1)$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ med avseende på (a) standardbasen, (b) basen $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$.

Lösning. Koordinaterna k_1, k_2, k_3 för $\mathbf{u}$ i basen $(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3)$ fås genom att lösa ekvationssystemet $\mathbf{b}_1 k_1 + \mathbf{b}_2 k_2 + \mathbf{b}_3 k_3 = \mathbf{u}$ (vektorerna ska här skrivas som kolonnmatriser). På matrisform blir detta $(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3 \mid \mathbf{u})$: Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 3 \\ k_3 = 4 \end{cases}$$

Koordinaterna för $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ i basen $(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3)$ är därför $(-1, 3, 4) - (1, 1, -1) = (-2, 2, 5)$, d.v.s $\mathbf{u} - \mathbf{v} = -2\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3$. Koordinaterna för $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ i standardbasen fås slutligen genom

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = -2\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Svar: (a) $(-3, -2, -1)$. (b) $(-2, 2, 5)$. □

2. Delrummen M, N till $\mathbb{R}^4$ ges av $M = \operatorname{span}\{(6, -1, -3, 2), (2, 2, 1, 2)\}$ respektive $N = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 7x_1 + 4x_2 - 23x_4 = 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0\}$. Bestäm en bas i $M \cap N$.

Lösning. Vektorn $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ligger i M om och endast om det finns tal s, t sådana att

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6s + 2t \\ -s + 2t \\ -3s + t \\ 2s + 2t \end{pmatrix}$$

Vektorn $\mathbf{x}$ ligger därför i $M \cap N$ om och endast om det finns tal s, t sådana att $\mathbf{x} = (6s + 2t, -s + 2t, -3s + t, 2s + 2t)$,

$$0 = 7(6s + 2t) + 4(-s + 2t) - 23(2s + 2t) = -8s - 24t \iff s = -3t$$

och

$$0 = 2(-s + 2t) - 3(-3s + t) - 5(2s + 2t) = -3s - 9t \iff s = -3t$$

Alltså ligger vektorn $\mathbf{x}$ i $M \cap N$ om och endast om det finns ett tal t sådant att

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18t + 2t \\ 3t + 2t \\ 9t + t \\ -6t + 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -16 \\ 5 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Svar: En bas i $M \cap N$ är $\{(-16, 5, 10, -4)\}$. □

3. Vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,1,0)$, $\mathbf{u}_3 = (0,1,-2,1)$ och $\mathbf{u}_4 = (1,2,1,1)$ spänner upp ett delrum M till $\mathbb{R}^4$.

(i) Finn en bas i M *bland dessa vektorer.*

(ii) För vilka värden på den reella konstanten a tillhör vektorn $\mathbf{v} = (3,a,a,2a-4)$ delrummet M? Ange, för dessa värden på a, koordinaterna för vektorn $\mathbf{v}$ i den bas som du valde i del (i) av uppgiften.

Lösning. Vi löser båda delarna av uppgiften samtidigt. En vektor $\mathbf{v}$ ur $\mathbb{R}^4$ tillhör M omm det finns reella tal $\lambda_1, ..., \lambda_4$ sådana att

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}$$

Detta är ekvivalent med att det linjära ekvationssystemet

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\a\\a\\2a-4\end{pmatrix}$$

har någon lösning.

Vi löser ekvationssystemet med hjälp av Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&3\\1&1&1&2&a\\0&1&-2&1&a\\0&0&1&1&2a-4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-2&9-3a\\0&1&0&3&3a-6\\0&0&1&1&a-3\\0&0&0&0&a-1\end{array}\right)$$

Av den fjärde raden i den sista matrisen framgår att systemet är lösbart omm $a = 1$, vilket betyder att $\mathbf{v} \in M$ omm $a = 1$. Om $a = 1$ blir matrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-2&6\\0&1&0&3&-3\\0&0&1&1&-2\\0&0&0&0&0\end{array}\right) \qquad (*)$$

och $\mathbf{v} = (3,1,1,-2)$. De tre första kolonnerna är pivotkolonner. Alltså utgör $\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$,$\mathbf{u}_3$ en bas i M. Av $(*)$ framgår också att $\mathbf{v} = 6\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$.

Svar: (i) $\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$,$\mathbf{u}_3$ är en bas i M. (ii) $\mathbf{v} \in M$ omm $a = 1$, i vilket fall koordinaterna för $\mathbf{v}$ i den valda basen är $(6,-3,-2)$. □

Uppgifter till lektion nr 2:

1. Låt M vara delrummet till $\mathbb{E}^4$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1)$ och $\mathbf{v}_2 = (1,2,1,-2)$. Bestäm ON-baser i M och ortogonala komplementet $M^\perp$, till M. Skriv vektorn $\mathbf{u} = (1,0,0,0)$ som en summa $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_1 \in M$ och $\mathbf{u}_2 \in M^\perp$. Bestäm avståndet från $\mathbf{u}$ till M. Ange slutligen en matris A sådan att för varje $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^4$ gäller att $A\mathbf{x} \in M$ och $\mathbf{x} - A\mathbf{x} \in M^\perp$.

Lösning. Vi börjar med att bestämma en ON-bas i M, med hjälp av Gram-Schmidt: Om vi sätter $\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,1,1,1)$,

$$\mathbf{c}_2' = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{c}_1}{\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1}\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_2 - \frac{2}{4}\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2}(1,3,1,-5)$$

och $\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}_2' = (1,3,1,-5)$ så blir $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ en ortogonalbas i M. Normering av dessa vektorer ger oss ON-basen $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1/2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_2/6$ i M. $M^\perp$ består av alla vektorer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ sådana att $0 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ och $0 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4$, vilket betyder att $M^\perp$ kan beskrivas som lösningsrummet till det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Alltså består $M^\perp$ av alla $\mathbf{x} = (-s-4t, 3t, s, t)$, där $s, t \in \mathbb{R}$ är godtyckliga. Vi väljer först $s = -1$, $t = 0$ vilket ger oss $\mathbf{c}_3 = (1,0,-1,0)$. Det återstår för oss att finna $\mathbf{c}_4 = (-s-4t, 3t, s, t) \perp \mathbf{c}_3 \Rightarrow 0 = \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_4 = -s - 4t - s = -2s - 4t \Rightarrow s = -2t$. Alltså har vi $\mathbf{c}_4 = (2t - 4t, 3t, -2t, t) = t(-2,3,-2,1)$. Väljs $t = -1$ fås $\mathbf{c}_4 = (2,-3,2,-1)$. En ON-bas i $M^\perp$ är alltså $\mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_3/\sqrt{2}$, $\mathbf{b}_4 = \mathbf{c}_4/\sqrt{18}$.

Varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^4$ kan skrivas $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + (\mathbf{x} - A\mathbf{x})$. Eftersom det är givet att $A\mathbf{x} \in M$ och $\mathbf{x} - A\mathbf{x} \in M^\perp$ drar vi slutsatsen att A är standardmatrisen för den ortogonala projektionen på M. Enligt projektionsfomeln gäller alltså

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c}_1 \frac{\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{c}_1^2} + \mathbf{c}_2 \frac{\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{c}_2^2} = \left(\frac{\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1^T}{4} + \frac{\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2^T}{36}\right)\mathbf{x}$$

Då $\mathbf{x}$ är godtycklig kan vi dra slutsatsen att

$$A = \frac{\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1^T}{4} + \frac{\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2^T}{36} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 1\ 1\ 1) + \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}(1\ 3\ 1\ -5) =$$

$$= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & 8 & 3 & -15 \\ 1 & 3 & 1 & -5 \\ -5 & -15 & -5 & 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 9 & 6 & -3 \\ 5 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 17 \end{pmatrix}$$

Slutligen får vi $\mathbf{u}_1 = A\mathbf{u} = \frac{1}{18}(5,6,5,2)$ och $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \frac{1}{18}(13,-6,-5,-2)$. $\square$

2. $\mathbb{R}^2$ förses med en inre produkt, $\langle -, - \rangle$, sådan att $\mathbf{b}_1 = (3, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (5, 3)$ bildar en ON-bas. Bestäm $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \rangle$, för $i = 1,\ 2$ och $k = 1,\ 2$, där $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ är standardbasen i $\mathbb{R}^2$. Ange även en matris C sådan att

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (C\mathbf{u}) \bullet (C\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2,$$

där $\bullet$ betecknar standardskalärprodukten i $\mathbb{R}^2$.

Lösning. Eftersom $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ är en ON-bas gäller att

$$\begin{aligned}\langle \xi_1\mathbf{b}_1 + \xi_2\mathbf{b}_2, \eta_1\mathbf{b}_1 + \eta_2\mathbf{b}_2 \rangle &= \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle \xi_1\eta_1 + \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle \xi_1\eta_2 + \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \rangle \xi_2\eta_1 + \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle \xi_2\eta_2 \\ &= \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2\end{aligned}$$

Av sambanden $\mathbf{b}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = 5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ får vi $\mathbf{e}_1 = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$, $\mathbf{e}_2 = 5\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2$. För den inre produkten av två godtyckliga vektorer $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$ gäller därför

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle x_1(-3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2) + x_2(5\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2), y_1(-3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2) + y_2(5\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2) \rangle =$$

$$= \langle (-3x_1 + 5x_2)\mathbf{b}_1 + (2x_1 - 3x_2)\mathbf{b}_2, (-3y_1 + 5y_2)\mathbf{b}_1 + (2y_1 - 3y_2)\mathbf{b}_2 \rangle =$$

$$= (-3x_1 + 5x_2)(-3y_1 + 5y_2) + (2x_1 - 3x_2)(2y_1 - 3y_2) = \begin{pmatrix} -3x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3y_1 + 5y_2 \\ 2y_1 - 3y_2 \end{pmatrix}$$

$$= (C\mathbf{x}) \bullet (C\mathbf{y}), \quad \text{där} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Av ovanstående följer

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 13, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = -21 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle,$$

$$\text{samt} \qquad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 34.$$

□

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Visa att $\langle x, y \rangle = x^t A y$ är en skalärprodukt i $\mathbb{R}^2$. (x^t är transponatet av x).
Tips: Svårigheten är att visa att den är positivt definit. Gör detta med kvadratkomplettering.

(b) Bestäm det ortogonala komplementet till vektorn $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ med avseende på denna skalärprodukt.

(c) Bestäm en matris C sådan att $C^t C = A$.
Tips: Bestäm först en ON-bas $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ med avseende på $\langle -, - \rangle$. Då gäller att $\langle x, y \rangle = x_b^t y_b = x^t A y$. Uttryck sedan $\mathcal{B}$-koordinaterna i standardkoordinaterna.

(d) Bestäm alla matriser F sådana att $F^t F = A$.

Lösning. Vi uttrycker skalärprodukten explicit i standardkoordinaterna:

$$\langle x, y\rangle = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 \qquad (\#)$$

(a) Symmetrisk:

$$\langle y, x\rangle = y^tAx = (y^tAx)^t = x^tAy = \langle x, y\rangle.$$

Additiv:

$$\langle x + y, z\rangle = (x + y)^tAz = x^tAz + y^tAz = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$$

Homogen:

$$\langle \lambda x, y\rangle = (\lambda x)^tAy = \lambda(x^tAy) = \lambda\langle x, y\rangle.$$

Positiv: Av (#) får vi

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$$

Om $\langle x, x\rangle = 0$ måste $0 = x_1 - x_2 = x_2$ av vilket följer att $\mathbf{x} = \vec{0}$.

(b) Av (#) följer att x är ortogonal mot $v = (1, -1)$ omm

$$0 = \langle x, v\rangle = x_1 - x_1(-1) - x_2 + 2x_2(-1) = 2x_1 - 3x_2,$$

vilket är fallet omm $\mathbf{x} = t(3, 2)$ för något $t \in \mathbb{R}$. Alltså gäller $v^\perp = \mathrm{span}\{(3, 2)\}$.

(c) Från (b) ser vi att vektorerna $v_1 = (1, -1)$ och $v_2 = (3, 2)$ utgör en ortogonalbas i $(\mathbb{R}^2, \langle -, -\rangle)$. Av

$$\langle v_1, v_1\rangle = (1 - (-1))^2 + (-1)^2 = 5, \quad \langle v_2, v_2\rangle = (3 - 2)^2 + 2^2 = 5$$

följer att $b_1 = v_1/\sqrt{5}$, $b_2 = v_2/\sqrt{5}$ är en ON-bas. Om e_1, e_2 är standardbasen kan vi skriva $\sqrt{5}b_1 = e_1 - e_2$, $\sqrt{5}b_2 = 3e_1 + 2e_2$ av vilket fås att $\sqrt{5}e_1 = 2b_1 + b_2$, $\sqrt{5}e_2 = -3b_1 + b_2$. På samma sätt som i uppgift 2 får vi nu (för att få enklare uttryck multiplicerar vi med $5 = \sqrt{5}\sqrt{5}$)

$$\begin{aligned}
5x^tAy &= 5\langle x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2\rangle \\
&= \langle x_1(2b_1 + b_2) + x_2(-3b_1 + b_2), y_1(2b_1 + b_2) + y_2(-3b_1 + b_2)\rangle \\
&= \langle (2x_1 - 3x_2)b_1 + (x_1 + x_2)b_2, (2y_1 - 3y_2)b_1 + (y_1 + y_2)b_2\rangle \\
&= (2x_1 - 3x_2)(2y_1 - 3y_2) + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \\
&= \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2y_1 - 3y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = 5(Cx)\cdot(Cy) = 5x^t(C^tC)y
\end{aligned}$$

där

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Då x, y är godtyckliga följer att $A = C^tC$. Vi kontrollerar detta:

$$C^tC = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = A$$

(d) För matrisen F skall alltså gälla att

$$C^tC = A = F^tF$$

där C är matrisen i (c). Av detta följer att

$$I_2 = (C^{-1})^tC^tCC^{-1} = (C^{-1})^tF^tFC^{-1} = (FC^{-1})^t(FC^{-1})$$

Om vi sätter $G = FC^{-1}$ så har matrisen G två kolonner, $G = (g_1\ g_2)$, och

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = G^tG = \begin{pmatrix} g_1^t \\ g_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \cdot g_1 & g_1 \cdot g_2 \\ g_2 \cdot g_1 & g_2 \cdot g_2 \end{pmatrix}$$

Alltså är g_1, g_2 ortogonala enhetsvektorer (med avseende på standardskalärprodukten i $\mathbb{R}^m$, $m > 1$). Omvänt, om $G = (g_1\ g_2)$, där g_1, g_2 ortogonala enhetsvektorer i $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, och $G = FC^{-1} \Rightarrow F = GC$, så gäller

$$F^tF = C^tG^tGC = C^tI_2C = C^tC = A$$

Svar: $F = GC$ där G är en $m \times 2$-matris, $m > 1$, vars kolonner är ON.

$\square$

Uppgifter till lektion nr 3:

1. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ har standardmatrisen $A = \begin{pmatrix} 17 & -9 \\ 30 & -16 \end{pmatrix}$.

(a) Bestäm en bas $\underline{b}$ i $\mathbb{R}^2$ av egenvektorer till F.

(b) Bestäm basbytesmatriserna (T_{eb} och T_{be}) mellan basen $\underline{b}$ och standardbasen $\underline{e}$, samt beräkna matrisprodukten $T_{be}AT_{eb}$.

(c) Bestäm A^n för alla $n \in \mathbb{Z}$.

Lösning. (a) Egenvärdena till F ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -9 \\ 30 & -16-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -9 \\ -2-2\lambda & -16-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 2 & -16-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)$$

Alltså har vi $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Motsvarande egenvektorer ges av de på matrisform skrivna ekvationssystemen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 18 & -9 & 0 \\ 30 & -15 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{t.ex.} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 15 & -9 & 0 \\ 30 & -18 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 5t \end{cases} \quad \text{t.ex.} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Som egenvektorer till skilda egenvärden måste $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ vara linjärt oberoende och därför en bas i $\mathbb{R}^2$ (vilket för övrigt lätt kontrolleras).

(b) Vi har

$$T_{eb} = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T_{be} = T_{eb}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$T_{be}AT_{eb} = D$, där D är diagonalmatrisen med $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ i diagonalen. Detta inses av

$$AT_{eb} = A(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2) = (A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2) = (\lambda_1\mathbf{b}_1\ \lambda_2\mathbf{b}_2) = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = T_{eb}D.$$

Se sidan 371 i läroboken.

(c) Av (b) följer att A kan skrivas

$$A = T_{eb}DT_{be} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ur detta följer (se sid. 377) att

$$A^n = T_{eb}D^nT_{be} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

för alla $n \in \mathbb{Z}$.

□

2. Låt $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$. $F : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ är den ortogonala projektionen på M och $G : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ är den ortogonala speglingen i M.

(a) Rita en lämplig figur som visar att $G = 2F - I$, där I är identitetsavbildningen ($I\mathbf{x} = \mathbf{x}$) på $\mathbb{E}^3$.

(b) Visa, med hjälp av en annan lämplig figur, att det finns en ON-bas $\underline{b}$ i $\mathbb{E}^3$ som består av egenvektorer till både F och G. Bestäm en sådan bas.

(c) Bestäm basbytesmatriserna (T_{eb} och T_{be}) mellan basen $\underline{b}$ och standardbasen $\underline{e}$.

(d) Bestäm egenvärdena till F och G.

(e) Bestäm standardmatriserna $[F]$ och $[G]$ för F respektive G.

Lösning. (a) Av typografiska skäl nödgas vi beskriva figuren med ord: Planet M illustreras av en parallogram på vilken origo O är utprickat. Från O till till en punkt X (ej på planet) dras en pil som får illustrera en godtycklig vektor $\mathbf{x}$. Från X dras en linje vinkelrätt mot planet. Denna linje skär planet i en punkt som betecknas P. På linjen ligger även spegelbilden S av punkten X (och P ligger mitt emellan X och S). Vektorn från O till P är lika med $F(\mathbf{x})$, medan vektorn från O till S är lika med $G(\mathbf{x})$. Vektorn från X till P är lika med $F(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$, vilket betyder att vektorn från X till S är $2(F(\mathbf{x}) - \mathbf{x})$. Alltså gäller

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 2(F(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) = 2F(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = (2F - I)(\mathbf{x})$$

vilket, då $\mathbf{x}$ är godtycklig, betyder att $G = 2F - I$.

(b) För varje $\mathbf{v} \in M$ gäller att $F(\mathbf{v}) = G(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. För varje $\mathbf{v} \perp M$ gäller att $F(\mathbf{v}) = \vec{0}$ och $G(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$. Om $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ är två ortogonala enhetsvektorer i M och $\mathbf{b}_3$ är en enhetsvektor ortogonal mot M så utgör alltså $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ en ON-bas av egenvektorer till både F och G svarande mot egenvärdena $1,\ 1,\ 0$ respektive $1,\ 1,\ -1$.

Vektorerna $\mathbf{x} \in M$ uppfyller $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Sätter vi $x_2 = s$, $x_3 = t$ fås $x_1 = s - 2t$, d.v.s $\mathbf{x} = (s-2t, s, t)$. Väljer vi $s = t = 1$ får vi $\mathbf{c}_1 = (-1, 1, 1) \in M$. För att $\mathbf{x} = \mathbf{c}_2 = (s-2t, s, t)$ skall vara ortogonal mot $\mathbf{c}_1$ skall gälla att $0 = \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{x} = -(s-2t) + s + t = 3t$ $\Rightarrow t = 0$, $\mathbf{c}_2 = (s, s, 0) = (1, 1, 0)$. Låter vi $\mathbf{c}_3 = (1, -1, 2)$ (normal till M) kommer alltså $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1/\sqrt{3}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_2/\sqrt{2}$ och $\mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_3/\sqrt{6}$ att vara en ON-bas av egenvektorer till både F och G.

(c) Vi får med vårt val av bas (av egenvektorer)

$$T_{eb} = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad T_{be} = T_{eb}^{-1} = T_{eb}^{t}.$$

(d) Enligt (b) är egenvärdena till F och G $1,\ 1,\ 0$ respektive $1,\ 1,\ -1$.

(e) Vi utnyttjar ortogonalbasen $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ av egenvektorer som vi fann i (b): Transformationsmatriserna mellan standardbasen $\underline{e}$ och basen $\underline{c}$ är då

$$T_{ec} = (\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

och

$$T_{ce} = T_{ec}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^t/\mathbf{c}_1^2 \\ \mathbf{c}_2^t/\mathbf{c}_2^2 \\ \mathbf{c}_3^t/\mathbf{c}_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/6 & -1/6 & 2/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss

$$[F] = [F]_{ee} = T_{ec}[F]_{cc}T_{ce} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_{ce} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

samt

$$[G] = 2[F] - [I] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

För dessa standardmatriser skall gälla att $[F] = [F][F]$ och $I = [G][G]$, vilket du lätt kontrollerar (och kanske även förklarar!).

□

3. Den linjära operatorn F på $\mathbb{E}^3$ har i standardbasen $\underline{e}$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & a+1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) För vilka $a \in \mathbb{R}$ finns en ON-bas i $\mathbb{E}^3$ som består av egenvektorer till F? Ange i förekommande fall en sådan bas.

(b) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är F diagonaliserbar? Ange i förekommande fall en bas $\underline{b}$ i $\mathbb{E}^3$, bestående av egenvektorer till F, och basbytesmatrisen T_{eb}.

Lösning. (a) Eftersom A ej är symmetrisk (oavsett a-värdet) så finns inget värde på a för vilket det finns en ON-bas som består av egenvektorer till F.

(b) Egenvärdena till F ges av

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a+1-\lambda & 1 & a+1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1-\lambda & 0 & a+1-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (a+1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (a+1-\lambda)(2-\lambda)(0-\lambda)$$

Alltså $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = a+1$. Om $a \neq \pm 1$ har vi tre distinkta egenvärden, vilket medför att F är diagonaliserbar.

Egenvektorerna ges, för varje värde på a, av de på matrisform skrivna ekvationssystemen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & a+1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \text{t.ex} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 1 & a+1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} \quad \text{t.ex} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

respektive

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & a+1 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -a-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = a^2 t \\ y = (a+1)t \\ z = -t \end{cases} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} a^2 \\ a+1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I alla tre fallen ser vi att motsvarande egenrum har dimension 1. Det innebär att då $a = \pm 1$ har vi ett egenvärde med algebraisk multiplicitet 2 och geometrisk multiplicitet 1. Alltså är F ej diagonaliserbar då $a = \pm 1$. Detta framgår också av

$$\det(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ ) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 0 & 2 & a+1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+1)$$

$\square$

Uppgifter till lektion nr 4:

1. Den linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ ges av

$$F(x)(t) = x'(t) + x(1) - x(0)t, \qquad x(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 \in \mathcal{P}_2. \tag{$*$}$$

(a) Bestäm matrisen för F med avseende på baserna $\underline{b}$ och $\underline{c}$ om $b_1 = 1+t+t^2$, $b_2 = 1+t$, $b_3 = t + t^2$, $c_1 = 2 - t$ och $c_2 = 1 + 2t$.

(b) Bestäm baser i $N(F)$ och $V(F)$.

Lösning. (a) Från $(*)$ får vi

$$F(b_1) = 4 + t, \quad F(b_2) = 3 - t, \quad F(b_3) = 3 + 2t;$$

$$F(b_1)_s = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(b_2)_s = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F(b_3)_s = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

där $\underline{s} = (1\ t)$ är standardbasen i $\mathcal{P}_1$. Koordinaterna, k_{1j} och k_{2j}, för $F(b_j)$, $j = 1, 2, 3$, ges av ekvationen $k_{1j}c_1 + k_{2j}c_2 = F(b_j)$, vilken är ekvivalent med ekvationssystemet $c_{1s}k_{1j} + c_{2s}k_{2j} = F(b_j)_s$. Skrivet på matrisform blir systemet

$$(c_{1s}\ c_{2s} \mid F(b_j)_s), \qquad j = 1, 2, 3.$$

Eftersom de tre systemen har samma koefficientmatris kan de lösas samtidigt. Vi får

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 5 & 0 & 7 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Alltså har vi

$$[F]_{cb} = (F(b_1)_c\ F(b_2)_c\ F(b_3)_c) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) Av $(*)$ får vi

$$F(x)(t) = (x_0 + 2x_1 + x_2) + (-x_0 + 2x_2)t, \qquad x(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 \in \mathcal{P}_2.$$

Det betyder att $x \in N(F) \Leftrightarrow 0 = x_0 + 2x_1 + x_2 = -x_0 + 2x_2 \Leftrightarrow x(t) = \lambda(4 - 3t + 2t^2)$. Alltså gäller $N(F) = \operatorname{span}\{4 - 3t + 2t^2\}$. Av dimensionssatsen följer att $V(F)$ är ett tvådimensionellt delrum av $\mathcal{P}_1$. Då ett äkta delrum har lägre dimension än hela rummet drar vi slutssatsen att $V(F) = \mathcal{P}_1$.

□

2. Låt $\mathcal{S}_2$ vara det tredimensionella rummet av alla reella, symmetriska 2×2-matriser

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Standardbasen i $\mathcal{S}_2$ är

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den linjära avbildningen $F : \mathcal{S}_2 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ har standardmatrisen

$$[F] = \begin{pmatrix} 1+2a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4a & 3 & -2a \end{pmatrix}$$

För vilka värden på konstanten a har nollrummet $N(F)$ och värderummet $V(F)$ någon gemensam vektor som inte är nollvektorn? Ange en sådan vektor i alla förekommande fall. *(Glöm inte att vektorerna i detta fall är symmetriska 2×2-matriser och ingenting annat!)*

Lösning. För att $N(F)$ skall innehålla andra vektorer än nollvektorn är det nödvändigt att

$$0 = \begin{vmatrix} 1+2a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4a & 3 & -2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2a & 3-4a & -2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+2 & 3 \\ 2a & 3-4a \end{vmatrix} =$$

$$= 2(3-4a-4a^2) = 8\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{3}{2}+a\right) \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ el. } a = -\frac{3}{2}.$$

I fallet $a = 1/2$ har vi

$$[F] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$N(F)$ ges alltså här av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$N(F) = \left\{ \begin{pmatrix} t & -t \\ -t & -t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Om $V(F)$ innehåller $\begin{pmatrix} t & -t \\ -t & -t \end{pmatrix}$, $t \neq 0$, så innehåller $V(F)$ även $(1/t)\begin{pmatrix} t & -t \\ -t & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, d.v.s det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x = 1-t \\ y = t-1 \\ z = t \end{cases}$$

är lösbart. Vi ser att detta är fallet här. Exempelvis är $(0,0,1)$ en lösning. Det betyder att $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ är gemensam för $N(F)$ och $V(F)$.

I fallet $a = -3/2$ har vi

$$[F] = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$N(F)$ ges alltså här av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$N(F) = \{(3t, t, 5t) : t \in \mathbb{R}\}$. Om $V(F)$ innehåller en vektor $(3t, t, 5t)$, $t \neq 0$, så innehåller $V(F)$ även vektorn $(1/t)(3t, t, 5t) = (3, 1, 5)$, d.v.s det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

är lösbart. I detta fall saknas dock lösningar, vilket framgår av att det ekvivalenta systemet till höger innehåller den orimliga ekvationen $0 = 1$. □

3. Avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ definieras genom

$$F(x) = \begin{pmatrix} x(-1) & x(0) \\ x(0) & x(1) \end{pmatrix} \qquad x(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 \in \mathcal{P}_2.$$

Visa att F är linjär och inverterbar. Välj baser i $\mathcal{P}_2$ och $\mathcal{S}_2$ och bestäm matrisen för F^{-1} med avseende på de valda baserna.

Lösning. Vi väljer standardbaserna $\underline{b} = (b_0\ b_1\ b_2) = (1\ t\ t^2)$ i $\mathcal{P}_2$ och

$$\underline{e} = (e_1\ e_2\ e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

i $\mathcal{S}_2$. Då gäller

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 + x_2 & x_0 \\ x_0 & x_0 + x_1 + x_2 \end{pmatrix} = (x_0 - x_1 + x_2)e_1 + (x_0)e_2 + (x_0 + x_1 + x_2)e_3$$

Alltså har vi

$$F(x)_e = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 + x_2 \\ x_0 \\ x_0 + x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = [F]_{eb}\, x_b$$

Inversen $[F^{-1}]_{be}$, till $[F]_{eb}$, fås genom

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Alltså

$$[F^{-1}]_{be} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Att $[F^{-1}]_{be}$ existerar medför att F är inverterbar. Vi avstår tills vidare från att visa linearitetet. □

Uppgifter till lektion nr 5:

1. Bestäm, för alla värden på konstanten a, typen av ytan

$$2axy + z^2 = a + 1$$

samt (minsta) avståndet från ytan till origo. Avgör även för vilka a ytan är en rotationsyta och bestäm i sådana fall rotationsaxelns riktning.

Lösning. Den kvadratiska formen $2axy + z^2$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till A ges av

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & a & 0 \\ a & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(a-\lambda)(-a-\lambda)$$

Alltså har vi egenvärdena $1,\ a,\ -a$. Vi går igenom de olika fallen, hela tiden beaktande att ytan är en rotationsyta om och endast om två egenvärden är lika:

$1 < a$: Vi tar egenvärdena i ordningen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = a$, $\lambda_3 = -a$. I principalkoordinaterna har ytan ekvationen $\tilde{x}^2 + a\tilde{y}^2 - a\tilde{z}^2 = a+1$. Ett negativt egenvärde och positivt högerled betyder att ytan är en enmantlad hyperboloid. Egenvärdena är distinkta (olika) så det är inte fråga om en rotationsyta. Minsta avståndet till origo har punkterna där $\tilde{x} = \tilde{z} = 0$ och $a\tilde{y}^2 = a+1$, d.v.s. punkterna $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (0, \pm\sqrt{1+a^{-1}}, 0)$. Avståndet från ytan till origo är alltså $\sqrt{1+a^{-1}}$.

$a = 1$: Egenvärdena är nu $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. I principalkoordinaterna har ytan ekvationen $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 2$. Ett negativt egenvärde och positivt högerled betyder att ytan är en enmantlad hyperboloid. Då $\lambda_1 = \lambda_2$ så är det fråga om en rotationsyta med $\tilde{z}$-axeln som rotationsaxel. Denna axel är parallell med egenvektorerna till egenvärdet $\lambda_3 = -1$, vilka ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ t.ex. } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Minsta avståndet till origo har punkterna på cirkeln $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 2$, $\tilde{z} = 0$. Avståndet från ytan till origo är alltså $\sqrt{2}$.

$0 < a < 1$: Egenvärdena är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = a$, $\lambda_3 = -a$. I principalkoordinaterna har ytan ekvationen $\tilde{x}^2 + a\tilde{y}^2 - a\tilde{z}^2 = a+1$. Ett negativt egenvärde och positivt högerled betyder att ytan är en enmantlad hyperboloid. Egenvärdena är distinkta så det är inte fråga om en rotationsyta. Minsta avståndet till origo har punkterna där $\tilde{y} = \tilde{z} = 0$ och $\tilde{x}^2 = a+1$, d.v.s. punkterna $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (\pm\sqrt{a+1}, 0, 0)$. Avståndet från ytan till origo är $\sqrt{a+1}$.

$a = 0$: Egenvärdena är $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Ytan har ekvationen $z^2 = 1$ (i detta fall är x, y, z principalkoordinater), d.v.s ytan består av de två parallella planen $z = \pm 1$. Alla räta linjer parallella med z-axeln fungerar som rotationsaxel. Minsta avståndet till origo har punkterna $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$ och detta avstånd är 1.

$-1 < a < 0$: Egenvärdena är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -a = |a|$, $\lambda_3 = a = -|a|$. I principalkoordinaterna har ytan ekvationen $\tilde{x}^2 + |a|\tilde{y}^2 - |a|\tilde{z}^2 = a + 1$. Ett negativt egenvärde och positivt högerled betyder att ytan är en enmantlad hyperboloid. Egenvärdena är distinkta så det är inte fråga om en rotationsyta. Minsta avståndet till origo har punkterna där $\tilde{y} = \tilde{z} = 0$ och $\tilde{x}^2 = a + 1$, d.v.s. punkterna $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (\pm\sqrt{a+1}, 0, 0)$. Avståndet från ytan till origo är $\sqrt{a+1}$.

$a = -1$: Egenvärdena är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. I principalkoordinaterna har ytan ekvationen $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 0$. Ett negativt egenvärde och högerledet 0 betyder att ytan är en kon. Då $\lambda_1 = \lambda_2$ så är det fråga om en rotationsyta med $\tilde{z}$-axeln som rotationsaxel. Denna axel är parallell med egenvektorerna till egenvärdet $\lambda_3 = -1$, vilka ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ t.ex. } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom origo ligger på ytan är avståndet från ytan till origo 0.

$a < -1$: Egenvärdena är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -a = |a|$, $\lambda_3 = a = -|a|$. I principalkoordinaterna har ytan ekvationen $\tilde{x}^2 + |a|\tilde{y}^2 - |a|\tilde{z}^2 = a + 1 = -|a| + 1$. Ett negativt egenvärde och negativt högerled betyder att ytan är en tvåmantlad hyperboloid. Egenvärdena är distinkta så det är inte fråga om en rotationsyta. Ekvationen för ytan kan omskrivas till $|a|\tilde{z}^2 - \tilde{x}^2 - |a|\tilde{y}^2 = |a| - 1$ varav framgår att minsta avståndet till origo har punkterna där $\tilde{x} = \tilde{y} = 0$ och $|a|\tilde{z}^2 = |a| - 1$, d.v.s. punkterna $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (0, 0, \pm\sqrt{1 - |a|^{-1}})$. Avståndet från ytan till origo är $\sqrt{1 - |a|^{-1}}$.

□

2. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ ges av

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F(s,t) = s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s - t \\ 2s - t \\ s + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

(a) Visa att $V(F)$ är ett plan genom origo och bestäm en ekvation för detta plan på formen $Ax + By + Cz = 0$ (normalform).

(b) Bestäm en symmetrisk matris (a_{ij}) sådan att

$$F(s_1, t_1) \cdot F(s_2, t_2) = (s_1 \ t_1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

för godtyckliga (s_1, t_1), $(s_2, t_2) \in \mathbb{E}^2$. Använd sedan $(*)$ för att bestämma maximum a och minimum b av $|F(s,t)|$ då $s^2 + t^2 = 1$. Visa att om $a = |F(s_1, t_1)|$ och $b = |F(s_2, t_2)|$ $(s_1^2 + t_1^2 = 1 = s_2^2 + t_2^2)$ så gäller att $0 = (s_1, t_1) \cdot (s_2, t_2) = F(s_1, t_1) \cdot F(s_2, t_2)$.

Lösning. Låt

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Då $\mathbf{r} = s\mathbf{f} + t\mathbf{g}$ är en parameterekvation för ett plan genom origo är det klart att $V(F)$ är ett plan genom origo. Normalen (A, B, C) till planet är vinkelrät mot $\mathbf{f}$ och $\mathbf{g}$, vilket innebär att (A, B, C) är en lösning till det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Alltså $0 = A + B = C$, så en normalekvation för $V(F)$ är $x - y = 0$.

(b) Vi har

$$\begin{aligned} F(s_1, t_1) \cdot F(s_2, t_2) &= (s_1\mathbf{f} + t_1\mathbf{g}) \cdot (\mathbf{f}s_2 + \mathbf{g}t_2) \\ &= s_1(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f})s_2 + s_1(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})t_2 + t_1(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})s_2 + t_1(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})t_2 \\ &= 9s_1s_2 - 2s_1t_2 - 2t_1s_2 + 6t_1t_2 \\ &= (s_1 \ t_1) \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = (s_1 \ t_1)A \begin{pmatrix} s_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \qquad (\#) \end{aligned}$$

Sätter vi $s_1 = s_2 = s$ och $t_1 = t_2 = t$ så erhålls

$$\begin{aligned} |F(s,t)|^2 &= F(s,t) \cdot F(s,t) \\ &= (s \ t) \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\ &= 9s^2 - 4st + 6t^2 \end{aligned}$$

Vi söker nu maximum a^2 och minimum b^2 av den kvadratiska formen $|F(s,t)|^2 = 9s^2 - 4st + 6t^2$ då $s^2 + t^2 = 1$. Dessa extremvärden är lika med största respektive minsta egenvärdet till matrisen A. Egenvärdena ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (10 - \lambda)(5 - \lambda)$$

Alltså $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{5}$. Egenvektorerna ges av

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \tilde{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

respektive

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} s_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

där vi normerat egenvektorerna så att de utgör en ON-bas i $\mathbb{E}^2$. För alla (s, t) gäller att

$$\lambda_1(s^2 + t^2) \geq |F(s,t)|^2 \geq \lambda_2(s^2 + t^2)$$

med likhet i den vänstra (högra) olikheten omm (s,t) är parallell med $\tilde{\mathbf{e}}_1$ ($\tilde{\mathbf{e}}_2$). Av (#) följer att

$$F(s_1,t_1)\cdot F(s_2,t_2) = (s_1\ t_1)A\begin{pmatrix} s_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \lambda_2(s_1\ t_1)\begin{pmatrix} s_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Därmed är allt under (b) bevisat.

□

3. Låt F vara samma avbildning som i föregående uppgift.

(c) F avbildar enhetscirkeln $s^2+t^2=1$ (i $\mathbb{E}^2$) på en kurva $\mathcal{C}$ (i $V(F)$). Låt $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3$ vara en ON-bas i $\mathbb{E}^3$ sådan att $\mathbf{c}_1$ ($\mathbf{c}_2$) är parallell med $F(s_1,t_1)$ ($F(s_2,t_2)$) (där (s_1,t_1) och (s_2,t_2) är som i (b)). Visa att $\mathcal{C}$, i motsvarande koordinatsystem $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, bestäms av ekvationerna

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2}+\frac{\tilde{y}^2}{b^2}=1, \qquad \tilde{z}=0.$$

(d) Visa att $\mathcal{C}$ är en ellips med halvaxlarna a (halva storaxeln) respektive b (halva lillaxeln). Ange xyz-koordinaterna för alla punkter på ellipsen vars avstånd till origo är a eller b.

Lösning. (c) Om vi sätter $\mathbf{a}=F(\tilde{\mathbf{e}}_1)$, $\mathbf{b}=F(\tilde{\mathbf{e}}_2)$ gäller, enligt 2(b), att $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|=a=\sqrt{10}$ och $|\mathbf{b}|=b=\sqrt{5}$. Mer explicit har vi

$$\mathbf{a}=F(\tilde{\mathbf{e}}_1)=\frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}=\sqrt{10}\mathbf{c}_1$$

och

$$\mathbf{b}=F(\tilde{\mathbf{e}}_2)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}=\sqrt{5}\mathbf{c}_2$$

Vektorerna $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ utgör en ON-bas i $V(F)$ och vektorerna

$$\mathbf{c}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

utgör en ON-bas i $\mathbb{E}^3$. Koordinaterna för en godtycklig punkt på $\mathcal{C}$ ges av

$$\mathbf{r}=F(s,t)=F(s\mathbf{e}_1+t\mathbf{e}_2)=F(\tilde{s}\tilde{\mathbf{e}}_1+\tilde{t}\tilde{\mathbf{e}}_2)=\tilde{s}F(\tilde{\mathbf{e}}_1)+\tilde{t}F(\tilde{\mathbf{e}}_2)=\tilde{s}a\mathbf{c}_1+\tilde{t}b\mathbf{c}_2+0\mathbf{c}_3$$

Alltså har vi $\tilde{x}=a\tilde{s}$, $\tilde{y}=b\tilde{t}$, $\tilde{z}=0$, vilket ger

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2}+\frac{\tilde{y}^2}{b^2}=\tilde{s}^2+\tilde{t}^2=1, \qquad \tilde{z}=0. \tag{$\diamondsuit$}$$

(d) Att $\mathcal{C}$ är en ellips med halvaxlarna a och b följer direkt av ($\diamondsuit$). Vi får verkligen alla punkter på ellipsen ty $(\tilde{s}, \tilde{t})$ är koordinaterna för en godtycklig punkt på enhetscirkeln. Punkterna på ellipsen med avståndet $a = \sqrt{10}$ till origo är $(\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0)$ och $(-\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0)$. Punkterna på ellipsen med avståndet $b = \sqrt{5}$ till origo är $(0, 0, \sqrt{5})$ och $(0, 0, -\sqrt{5})$.

$\square$