UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Styf 0707-253107

Prov i matematik
för programmen
ES, Q, KandFy, X
Linjär algebra II
2009–10–23

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Delrummet M av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0,1)$, $\mathbf{u}_3 = (3,1,0,-2)$, $\mathbf{u}_4 = (1,1,1,1)$. Bestäm en bas i M bland dessa vektorer och bestäm även $a \in \mathbb{R}$ så att vektorn $\mathbf{v} = (a,1,-1,3)$ tillhör M. Ange för ett sådant a-värde koordinaterna för $\mathbf{v}$ i den valda basen. Utvidga slutligen den valda basen till en bas i $\mathbb{R}^4$.

2. Låt M vara delrummet till $\mathbb{E}^4$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1)$ och $\mathbf{v}_2 = (1,2,1,4)$. Bestäm en ON-bas i det ortogonala komplementet $M^\perp$, till M. Skriv vektorn $\mathbf{u} = (0,0,1,0)$ som en summa $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_1 \in M$ och $\mathbf{u}_2 \in M^\perp$. Bestäm avståndet från $\mathbf{u}$ till M.

3. Låt $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{E}^3 : x - y - z = 0\}$. $F : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ är den ortogonala speglingen i M. Bestäm standardmatrisen för F.

4. Lös systemet

$$\begin{cases} y_1'(t) = 74y_1(t) - 60y_2(t) \\ y_2'(t) = 90y_1(t) - 73y_2(t) \end{cases}$$

där $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 3$.

5. Bestäm alla värden på den reella konstanten a för vilka ekvationen $ax^2 - y^2 + 4yz + 2z^2 = 1$ beskriver en rotationsyta i $\mathbb{E}^3$. Bestäm i sådana fall ytans typ, rotationsaxelns riktning samt minsta avståndet från ytan till origo.

6. Den linjära operatorn F på $\mathbb{R}^3$ har standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2a & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ a & a-3 & 4 \end{pmatrix}$$

För vilka värden på den reella konstanten a är F diagonaliserbar? Bestäm för varje sådant a en bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till F.

Var god vänd!

7. Låt $\mathcal{P}_2$ vara rummet av alla polynom av grad högst två och låt $\mathcal{S}_2$ beteckna rummet av alla symmetriska 2×2-matriser. Den linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ definieras genom

$$F(x) = \begin{pmatrix} x(-1) & x(0) \\ x(0) & x(1) \end{pmatrix} \qquad x(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 \in \mathcal{P}_2.$$

Visa att F är inverterbar och bestäm baser $\underline{b} = (b_1\ b_2\ b_3)$ i $\mathcal{P}_2$ och $\underline{c} = (c_1\ c_2\ c_3)$ i $\mathcal{S}_2$ sådana att $[F]_{cb} = I_3$, där I_3 är enhetsmatrisen av ordning 3.

8. I $\mathbb{R}^2$ införs skalärprodukten $\langle x, y \rangle = x^t A y$ (x^t är transponatet av x) där

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm det ortogonala komplementet till vektorn $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ med avseende på denna skalärprodukt.

(b) Bestäm en matris B sådan att $B^t B = A$.

(c) Bestäm en matris C sådan att $C^2 = A$.